ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Բալիկյան Սուրեն Վարուժանի

ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԼՈԿԱԼ-ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՎԱԾ 2-ՏՐՈՀՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան - 2008

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Баликян Сурен Варужанович

О ЛОКАЛЬНО-СБАЛАНСИРОВАННЫХ 2-РАЗБИЕНИЯХ ГРАФОВ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван – 2008

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ռ.Ռ. Քամալյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Գ. Գրիգորյան ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Ի.Ա. Կարապետյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2008թ. հունիսի 12-ին, ժամը 14^{00}-ին, ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2008թ. մայիսի 12-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. թեկնածու Վ.Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:	кандидат физ.-мат. наук Р.Р. Камалян
Официальные оппоненты:	доктор физ.-мат. наук Ю.Г. Григорян кандидат физ.-мат. наук И.А. Карапетян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита состоится 12-го июня 2008г. в 14^{00} часов на заседании специализированного совета 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” ВАК при ЕГУ по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 12-го мая 2008г.

Ученый секретарь специализированного совета	кандидат физ.-мат. наук В.Ж. Думанян.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Интерес к задачам о вершинных раскрасках графов возник в XIX веке, когда была сформулирована "гипотеза четырех красок" [1], согласно которой любая карта может быть раскрашена не более чем четырьмя цветами таким образом, чтобы никакие два государства с общей границей не получили бы одинаковый цвет. В переформулировке на языке теории графов "гипотеза четырех красок" утверждает, что хроматическое число [2] любого плоского графа не превосходит 4. До своего полного решения [3,4] задача прошла длительный путь, богатый интересными исследованиями, имеющими методологическое значение, ошибочными доказательствами и важными результатами [5, 6], существенно содействовав систематическому и всестороннему изучению вершинных раскрасок графов.

Различные оценки хроматического числа графа получены в [7,8]. Асимптотическое значение хроматического числа для почти всех n-вершинных графов найдено в [9]. NP-полнота некоторых задач о вершинных раскрасках графов установлена в [10, 11]. Для некоторых частных классов графов найдены полиномиальные алгоритмы, позволяющие по данному графу G и натуральному числу k определять, существует ли правильная раскраска вершин G в k цветов [7, 12, 13]. Задачи о правильных вершинных раскрасках графов, кроме своего теоретического значения, имеют еще и большую практическую ценность, поскольку они связаны с задачами составления оптимальных расписаний, минимизации памяти программ, минимизации числа процессоров в распределенных параллельных вычислениях и т.д. [14, 15].

По мере развития исследований правильных вершинных раскрасок графов и выявления их взаимосвязей с прикладными задачами из различных областей значительного внимания удостоились также и задачи о существовании и построении вершинных раскрасок специальных видов [16]. Как правило, характеристики условий таких раскрасок бывают связаны со специфическими особенностями соответствующих прикладных задач и могут быть обусловлены природой ресурсов, технологическими требованиями, особыми условиями труда, необходимостью обеспечения информационной или военной безопасности и т.д. При этом количественные ограничения чаще всего объясняются соответствующими ограничениями в реальных процессах (необходимость экономии природных ресурсов, ограниченное число исполнителей, малая производительность труда, завершение выполнения заказа к установленному директивному сроку и т.д.). Качественные ограничения происходят обычно из особенностей технологических процессов и специфических условий труда (учет индивидуальных пожеланий исполнителей, учет приоритетов участников и т.д.). Отметим, что многочисленные ограничения в реальных задачах заметно осложняют их исследование традиционными методами, какими являются, например, методы линейного программирования, потоки в сетях и т.д.

Одним из качественных аспектов, который важно учитывать в целях повышения безопасности моделируемых систем при наличии двух антагонистических влияний, является необходимость равномерного распределения этих влияний в сферах жизненных интересов субъектов системы, поскольку именно при равномерном распределении достигается наилучший баланс влияний и уменьшается вероятность возникновения конфликтов. Исследования такой направленности могут вестись в различных модификациях:

- субъекты моделируемой системы обладают способностью самозащиты,
- субъекты моделируемой системы не обладают способностью самозащиты.

Математическим определением, лежащим в основе настоящей работы и позволяющим изучать подобные задачи, является равномерная q-раскраска (equitable q-coloring), определенная в [17]: вершины гиперграфа требуется раскрасить в q цветов таким образом, чтобы количества вершин любых двух разных цветов, принадлежащих любому ребру гиперграфа, различались не более чем на 1. В [17] даны некоторые свойства и условия существования таких раскрасок.

В [18] доказано, что гиперграф $H = (V,\widetilde{E})$ является унимодулярным тогда и только тогда, когда для любого $V_0 \subseteq V$ существует раскраска $\chi : V_0 \to \{1,2\}$ такая, что для $\forall E \in \widetilde{E}$ $||E \cap \chi^{-1}(1)| - |E \cap \chi^{-1}(2)|| \leq 1$.

В [19] доказано, что если для любого порожденного подгиперграфа $H' = (V',\widetilde{E}')$ гиперграфа $H = (V,\widetilde{E})$ существует c_1-раскраска (раскраска в c_1 цветов) с максимальным расхождением, равным D, то есть существует раскраска $\chi : V \to \{1,2,\ldots,c_1\}$ такая, что для любого i и j, $1 \leq i < j \leq c_1$, и $\forall E \in \widetilde{E}'$ $\quad ||E \cap \chi^{-1}(i)| - |E \cap \chi^{-1}(j)|| \leq D$, то существует раскраска гиперграфа H в произвольные c_2 цветов с максимальным расхождением, равным $\frac{11}{10} \cdot c_1^2 \cdot D$. Причем, для произвольного c_2, c_2-раскраску гиперграфа H с максимальным расхождением, равным $\frac{11}{10} \cdot c_1^2 \cdot D + 3 \cdot c_1^{-k}|V|$, можно построить из $(c_1-1)\cdot(c_2-1)\cdot k$ c_1-раскрасок соответствующих подгиперграфов гиперграфа H с максимальным расхождением, равным D.

В [20] доказано, что для $\forall a \geq 1$, если максимальная степень k-однородного (k-uniform) гиперграфа H удовлетворяет условию $\Delta(H) \leq k^a$, то для гиперграфа H существует равномерная раскраска в $\frac{k}{a \ln k} \cdot (1 - o_k(1))$ цветов. Причем, результат является асимптотически строгим.

В [21, 22] рассмотрена задача о существовании и построении равномерной раскраски графа (graph equitable coloring) – такой правильной вершинной раскраски графа, при которой количества вершин, окрашенных в два разных цвета, отличаются не более чем на единицу.

В [23] доказано, что для любых $p,q \geq 2$ задача о существовании раскраски в 2 цвета для $(2p,2q)$-бирегулярных двудольных графов, при которой в окрестности любой вершины количества вершин различных цветов равны, является NP-полной.

В [24, 25] сформулирована, и далее исследована другими авторами, задача (satisfactory partition problem) о существовании такого 2-разбиения множества вершин графа на два непустых непересекающихся подмножества, при котором в окрестности любой вершины количества вершин, принадлежащих подмножеству, которому принадлежит рассматриваемая вершина, больше или равно количеству вершин, принадлежащих другому подмножеству; в [26] доказано, что данная задача является NP-полной.

Цель и задачи работы. Основной целью диссертационной работы является нахождение для некоторых классов графов необходимых, достаточных, необходимых и достаточных условий существования такого 2-разбиения множества вершин графа на два непересекающихся подмножества, при котором в окрестности каждой вершины количества вершин, принадлежащих двум подмножествам, отличаются не более чем на единицу (далее называемого локально-сбалансированным 2-разбиением), а также разработка эффективных алгоритмов, позволяющих строить такие 2-разбиения в случае их существования. Данная задача рассматривается при двух различных определениях окрестности вершины:

- окрестности вершины принадлежат вершины, смежные с рассматриваемой вершиной,
- окрестности вершины принадлежат вершины, расстояние которых от рассматриваемой вершины не превышает 1.

Объект исследования. Объектом исследования выступают различные классы графов, их структура и вытекающие из нее свойства.

Методы исследования. В процессе исследования использованы методы теории графов, а также методы комбинаторной оптимизации.

Научная новизна. Впервые в исследованиях по вершинным раскраскам графов сформулирована задача о существовании локально-сбалансированных 2-разбиений графов. Доказано, что данная задача является NP-полной для двудольных графов при обоих определениях окрестности вершины. Получен ряд результатов, позволяющих выяснять вопрос существования локально-сбалансированного 2-разбиения для некоторых классов графов.

Практическая значимость полученных результатов. Материалы диссертации, разработанные в ней методы и ее выводы имеют важное значение для теории вершинных раскрасок графов, а также могут применяться при построении и исследовании математических моделей систем при наличии двух антагонистических влияний на их субъекты.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Доказательство NP-полноты задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов при обоих определениях окрестности вершины.
2. Необходимые, необходимые и достаточные условия конструктивного типа для существования локально-сбалансированного 2-разбиения для некоторых классов графов.
3. Необходимые, достаточные, необходимые и достаточные условия конструктивного типа для существования решения в модифицированных версиях задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения для некоторых классов графов.

Апробация полученных результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на научных семинарах Института проблем информатики и автоматизации НАН РА (2004 - 2006 гг.), а также на научных конференциях – XV Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» в городе Дубна (Январь 28 - Февраль 02, 2008), на Годичной Конференции в Российско-Армянском (Славянском) Государственном Университете в 2007 г.

Публикации. По теме диссертации опубликованы четыре научные статьи и один тезис доклада конференции. Список опубликованных работ приводится в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 104 страницах и состоит из введения, трех глав и списка использованной литературы (57 наименований), содержит четыре рисунка.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснованы актуальность темы, определена цель исследования, а также представлены научная новизна полученных результатов и их практическая значимость.

В первой главе даются основные определения и обозначения, формулируются основные задачи, исследованные в диссертации, а также доказывается NP-полнота этих задач для класса двудольных графов.

В §1.1 даются основные определения и обозначения.

Множество вершин неориентированного графа G без кратных ребер и петель обозначается через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Наибольшая из степеней вершин графа G обозначается через $\Delta(G)$. Через $ex_G(x)$ обозначается эксцентриситет вершины $x \in V(G)$ в графе G. Для вершин $x \in V(G)$ и $y \in V(G)$ через $\rho_G(x,y)$ обозначается расстояние между вершинами x и y в графе G. Предполагается, по определению, что в простом цикле повторяющихся ребер нет.

Для вершины $v \in V(G)$ определим множества

$$\lambda_1(v) \equiv \{\omega \in V(G)/(\omega, v) \in E(G)\}, \quad \lambda_2(v) \equiv \{v\} \cup \lambda_1(v)$$

2-разбиением графа G называется функция $f : V(G) \to \{0,1\}$.

Частичным 2-разбиением графа G называется функция $g : V_g \to \{0,1\}$, где $V_g \subseteq V(G)$. Заметим, что 2-разбиение графа также является и частичным 2-разбиением графа.

Частичное 2-разбиение $g_1 : V_{g_1} \to \{0,1\}$ графа G называется расширением частичного 2-разбиениея $g_2 : V_{g_2} \to \{0,1\}$ графа G, где $V_{g_2} \subseteq V_{g_1}$, если для $\forall v \in V_{g_2}$ $g_1(v) = g_2(v)$.

2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным$_i$, где $i \in \{1,2\}$, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$||\{\omega \in \lambda_i(v)/f(\omega) = 1\}| - |\{\omega \in \lambda_i(v)/f(\omega) = 0\}|| \leq 1.$$

Приоритетом$_i$, где $i \in \{1,2\}$, в графе G называется функция $p : V(G) \to \{-1,0,1\}$, удовлетворяющая условию: для $\forall v \in V(G)$ $p(v) = 0$ тогда и только тогда, когда $|\lambda_i(v)|$ есть четное число.

Скажем, что 2-разбиение f графа G жестко подчиняется приоритету$_i$ p, где $i \in \{1,2\}$, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$|\{\omega \in \lambda_i(v)/f(\omega) = 1\}| - |\{\omega \in \lambda_i(v)/f(\omega) = 0\}| = p(v).$$

Скажем, что 2-разбиение f графа G гибко подчиняется приоритету$_i$ p, где $i \in \{1,2\}$, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$|\{\omega \in \lambda_i(v)/f(\omega) = f(v)\}| - |\{\omega \in \lambda_i(v)/f(\omega) = 1 - f(v)\}| = p(v).$$

Для любого $n \in \{0,1\}$, любой функции $g : X_g \to \{0,1\}$ и любого множества $X \subseteq X_g$, положим:

$$S(X,g,n) \equiv |\{\nu \in X/g(\nu) = n\}| - |\{\nu \in X/g(\nu) = 1 - n\}|$$

Для любой функции $g : X_g \to \{0,1\}$ и любого множества $X \subseteq X_g$ положим:

$$S_{1-0}(X,g) \equiv S(X,g,1)$$

Для произвольной вершины $x \in V(G)$ дерева G через $N_i(x)$, где $0 \le i \le ex_G(x)$, обозначим подмножество множества $V(G)$, определяемое следующим образом:

$$N_i(x) \equiv \{z \in V(G)/\rho_G(x,z) = i\}.$$

Очевидно, что для любой вершины $u \in N_i(x)$, где $1 \le i \le ex_G(x)$, существует единственная вершина $u^{(-1)} \in N_{i-1}(x)$, такая, что $(u,u^{(-1)}) \in E(G)$.

Для любой частично определенной функции $f : X \to Y$ множество элементов из X, на которых функция f определена, обозначим через $D(f)$.

Не определяемые понятия можно найти в [2].

В §1.2 сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Задача 1.2.1 *«О существовании локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения графа»*

Условие. *Дан граф G.*

Вопрос. *Существует ли локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение графа G?*

Задача 1.2.2 *«О существовании локально-сбалансированного$_2$ 2-разбиения графа»*

Условие. *Дан граф G.*

Вопрос. *Существует ли локально-сбалансированное$_2$ 2-разбиение графа G?*

В §1.3 исследована сложность задачи существования локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения графа.

Доказана

Теорема 1.3.1 *Для двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$ задача 1.2.1 NP-полна.*

Для доказательства теоремы 1.3.1 предложен полиномиальный алгоритм сведения [10] задачи «3-ВЫПОЛНИМОСТЬ» к **задаче 1.2.1** для двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$.

В §1.4 исследована сложность задачи существования локально-сбалансированного$_2$ 2-разбиения графа.

Доказана

Теорема 1.4.1 *Для двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$ задача 1.2.2 NP-полна.*

Для доказательства теоремы 1.4.1 предложен полиномиальный алгоритм сведения [10] задачи «3-ВЫПОЛНИМОСТЬ» к **задаче 1.2.2** для двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$.

Во второй главе проведено исследование основных задач диссертационной работы для различных частных классов графов.

В §2.1 для некоторых частных классов графов исследована задача о существовании локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения графа.

Доказана

Теорема 2.1.1 *Для любого дерева существует локально-сбалансированное*$_1$ *2-разбиение.*

Доказательство теоремы 2.1.1 проводится индукцией по числу вершин дерева.

Скажем, что последовательность вершин $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$ графа G $(k \geq 4)$ является противоречивой циклической последовательностью, если выполняются следующие условия:

- k четно.
- $v_{i_1} = v_{i_k}$, среди вершин $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}$ повторяющихся вершин нет.
- для $\forall j$, $1 \leq j \leq k-1$, существует вершина $u_{j,j+1}$ графа G, такая, что $d_G(u_{j,j+1}) = 2$, $(v_{i_j}, u_{j,j+1}) \in E(G)$ и $(v_{i_{j+1}}, u_{j,j+1}) \in E(G)$.

Теорема 2.1.2 *Для того, чтобы для графа G существовало локально-сбалансированное*$_1$ *2-разбиение, необходимо, чтобы в графе G не существовало противоречивой циклической последовательности.*

Критерий существования локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения графа C_n, где $n \geq 3$, дает

Теорема 2.1.3 *Для того, чтобы для графа C_n, где $n \geq 3$, существовало локально-сбалансированное*$_1$ *2-разбиение, необходимо и достаточно, чтобы n было кратно четырем.*

Критерий существования локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения графа K_n, где $n \geq 2$, дает

Теорема 2.1.4 *Для того, чтобы для графа K_n, где $n \geq 2$, существовало локально-сбалансированное*$_1$ *2-разбиение, необходимо и достаточно, чтобы n было четным.*

Множество всех простых циклов графа G обозначим через $T(G)$. Множество вершин простого цикла C графа G обозначим через $V_G(C)$. Положим:

$$V_G^c(S) \equiv \bigcup_{C \in S} V_G(C), \text{где } S \text{ есть произвольное подмножество множества } T(G).$$

Положим $L(G) = V(G) \backslash V_G^c(T(G))$.

Для $\forall u \in V(G)$ положим $L_G(u) \equiv \lambda_1(u) \cap L(G)$.

Через $V_2(G)$ обозначим подмножество вершин графа G, принадлежащих хотя бы двум простым циклам графа G.

Для $\forall x \in V(G)$ через $C_G(x)$ обозначим множество всех простых циклов графа G, которые проходят через вершину x.

Пусть A – множество графов, в которых любые два простых цикла имеют не более одной общей вершины.

Различные циклы $C_1 \in T(G)$ и $C_2 \in T(G)$ назовем смежными циклами в графе G, если $V_G(C_1) \cap V_G(C_2) \neq \emptyset$.

Последовательность $(C_1,C_2,\dots,C_p)$ различных простых циклов графа G, где $p \geq 2$, назовем гирляндой в графе G, если для $\forall j, 1 \leq j \leq p-1$, циклы C_j и C_{j+1} являются смежными циклами в G.

Гирлянду $(C_1,C_2,\dots,C_p)$ графа G назовем простой гирляндой в графе G, если для любых i и j, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq i < j \leq p$, $j-i \geq 2$, циклы C_i и C_j не смежны.

Гирлянду $(C_1,C_2,\dots,C_p)$ графа G, где $p \geq 3$, назовем ожерельем в графе G, если циклы C_1 и C_p смежны.

Ожерелье $(C_1,C_2,\dots,C_p)$ графа G назовем простым ожерельем в графе G, если выполнено одно из следующих двух условий:

1. $p = 3$ и $V_G(C_1) \cap V_G(C_2) \cap V_G(C_3) = \emptyset$;

2. $p \geq 4$ и выполнены условия

   (a) последовательность $(C_1,C_2,\dots,C_{p-1})$ является простой гирляндой графа G,

   (b) C_p смежен и с циклом C_1, и с циклом C_{p-1},

   (c) для $\forall j, 2 \leq j \leq p-2$, C_p не смежен с C_j.

Имеет место

Теорема 2.1.5 *Если $G \in A$, то в G не существует простого ожерелья.*

Подмножество $Q \subseteq T(G)$ простых циклов графа G назовем циклично-связанным, если для любых $C' \in Q$ и $C'' \in Q$ существует гирлянда $(C_1,C_2,\dots,C_p)$ в графе G, такая, что C_1 совпадает с C', C_p совпадает с C'', а при любых $C' \in Q$ и $C'' \notin Q$ не существует гирлянды $(C_1,C_2,\dots,C_p)$ в графе G, такой, что C_1 совпадает с C', C_p совпадает с C''.

Граф G назовем циклически-связанным, если множество $T(G)$ является циклично-связанным.

Граф G назовем абсолютно циклически-связанным, если он является циклически-связанным и для любого ребра $(x_1,x_2) \in E(G)$ по меньшей мере одна из вершин x_1 и x_2 принадлежит некоторому простому циклу.

Пусть G_1 и G_2 – связные графы, для которых $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, а $e_1 = (x_1,w_1)$ и $e_2 = (x_2,w_2)$ – их висячие ребра, соответственно, причем $d_{G_1}(w_1) = d_{G_2}(w_2) = 1$.

Определим граф $G_1 + (e_1 = e_2) + G_2$, который в дальнейшем будем называть графом, полученным из графов G_1 и G_2 операцией склейки ребер e_1 и e_2, следующим образом:

$$V(G_1 + (e_1 = e_2) + G_2) \equiv (V(G_1) \backslash \{w_1\}) \cup (V(G_2) \backslash \{w_2\}),$$
$$E(G_1 + (e_1 = e_2) + G_2) \equiv (E(G_1) \backslash \{e_1\}) \cup (E(G_2) \backslash \{e_2\}) \cup \{(x_1,x_2)\}.$$

Теорема 2.1.6 *Для связного графа G существует множество $Constr(G) \equiv \{G_1,\dots,G_k\}$ таких подграфов графа G, что:*

1. *граф G получается из графов множества $Constr(G)$ последовательными операциями, каждая из которых является операцией склейки ребер;*

2. *для* $\forall i$, $1 \le i \le k$, G_i *является деревом или абсолютно циклически-связанным графом.*

Теорема 2.1.7 *Пусть* G_1 *и* G_2 *– связные графы, для которых* $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$*, а* e_1 *и* e_2 *– их висячие ребра, соответственно. Чтобы для графа* $G_1 + (e_1 = e_2) + G_2$ *существовало локально-сбалансированное*$_1$ *2-разбиение, необходимо, чтобы для обоих графов* G_1 *и* G_2 *существовали локально-сбалансированные*$_1$ *2-разбиения.*

Теорема 2.1.8 *Пусть* G_1 *и* G_2 *– связные графы, для которых* $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$*,* e_1 *и* e_2 *– их висячие ребра, соответственно, и по меньшей мере один из графов* G_1 *и* G_2 *является двудольным. Чтобы для графа* $G_1 + (e_1 = e_2) + G_2$ *существовало локально-сбалансированное*$_1$ *2-разбиение, необходимо и достаточно, чтобы для обоих графов* G_1 *и* G_2 *существовали локально-сбалансированные*$_1$ *2-разбиения.*

Для $\forall G \in A$ цикловой расцветкой графа G назовем функцию $F : V_2(G) \times T(G) \to \{-1, 0, 1, 2\}$, удовлетворяющую условию: для $\forall (x, C) \in V_2(G) \times T(G)$ $F(x, C) \ge 0$ тогда и только тогда, когда $C \in C_G(x)$.

Пусть C – простой цикл графа $G \in A$, τ – некоторое направление обхода цикла C, и F – произвольная цикловая расцветка графа G.

(F, τ, C)-костью длины $k (k \ge 2)$ в графе G назовем последовательность $(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ вершин цикла C, такую, что выполняются условия:

1. среди вершин $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ повторяющихся вершин нет, за исключением единственного возможного случая повторения, когда $v_{i_1} = v_{i_k}$;

2. для $\forall j, 1 \le j \le k-1$, существует вершина $u_{j,j+1}$ цикла C (которую назовем промежуточной для v_{i_j} и $v_{i_{j+1}}$), которая при обходе цикла C по направлению τ следует непосредственно после v_{i_j}, и непосредственно после которой следует $v_{i_{j+1}}$, причем вершина $u_{j,j+1}$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

   (a) $d_G(u_{j,j+1}) = 2$,

   (b) $u_{j,j+1} \in V_2(G)$ и $0 \le F(u_{j,j+1}, C) \le 1$.

(F, τ, C)-кость $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ в графе G назовем циклической, если $v_{i_1} = v_{i_k}$.

(F, τ, C)-кость графа G назовем монополярной (гетерополярной), если число ее промежуточных вершин x, удовлетворяющих условию «$d_G(x) = 2$ или $x \in V_2(G)$ и $F(x, C) = 1$», является четным (нечетным).

Пусть $G \in A$ является циклически-связанным графом.

Определим функцию $F_G : V_2(G) \times T(G) \to \{-1, 0, 1, 2\}$.

Не ограничивая общность дальнейших рассуждений, можем считать, что $V_2(G) \neq \emptyset$.

Алгоритм построения функции F_G.

Шаг 1. Для любого $(x, C) \in V_2(G) \times T(G)$, где $C \notin C_G(x)$, положим $F_G(x, C) \equiv -1$.

Шаг 2. Положим $C[0] = \emptyset, t = 1$.

Шаг 3. Пусть цикл C_t графа G удовлетворяет условиям

$$C_t \in T(G) \backslash C[t-1] \text{ и } |V_G(C_t) \cap V_G^c((T(G) \backslash C[t-1]) \backslash C_t)| = 1.$$

Существование такого цикла C_t вытекает из неравенства $|T(G)\backslash C[t-1]| \geq 2$, теоремы 2.1.5 и из того, что G является циклически-связанным графом класса A.

Обозначим через u_t вершину цикла C_t, удовлетворяющую условию

$$V_G(C_t) \cap V_G^c((T(G)\backslash C[t-1])\backslash C_t) = \{u_t\}.$$

Пусть $V_G(C_t) \cap \lambda_1(u_t) = \{v_{1t}, v_{2t}\}$.

Замечание 2.1.1 *Если $(V_G(C_t)\backslash\{u_t\}) \cap V_2(G) \neq \emptyset$, то на множестве $((V_G(C_t)\backslash\{u_t\}) \cap V_2(G)) \times T(G)$ функция F_G уже определена.*

Пусть τ_t – такое направление обхода цикла C_t, при котором вершина u_t не следует непосредственно после вершины v_{1t}.

Положим

$$F_G(u_t, C_t) \equiv \begin{cases} 0\,(1), & \text{если существует монополярная (гетерополярная)} \\ & (F_G, \tau_t, C_t)\text{-кость } (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}), \text{ такая, что } v_{i_1} = v_{1t},\ v_{i_2} = v_{2t}. \\ 2, & \text{если не существует } (F_G, \tau_t, C_t)\text{-кости } (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}), \text{ такой,} \\ & \text{что } v_{i_1} = v_{1t},\ v_{i_2} = v_{2t}. \end{cases}$$

Положим $C[t] \equiv C[t-1] \cup \{C_t\}$.

Если $|C_G(u_t)\backslash C[t]| = 1$, то обозначим через C'_t цикл, удовлетворяющий условию $C_G(u_t)\backslash C[t] = \{C'_t\}$, и положим

$$F_G(u_t, C'_t) \equiv \begin{cases} 2, & \text{если } \{C \in (C_G(u_t)\backslash\{C'_t\})/F_G(u_t, C) = 2\} \neq \emptyset \text{ или } L_G(u_t) \neq \emptyset \\ 0\,(1), & \text{если } \{C \in (C_G(u_t)\backslash\{C'_t\})/F_G(u_t, C) = 2\} = \emptyset,\ L_G(u_t) = \emptyset \quad \text{и} \\ & \text{число } |\{C \in (C_G(u_t)\backslash\{C'_t\})/F_G(u_t, C) = 0\}| \text{ нечетно (четно).} \end{cases}$$

Шаг 4. Если $|T(G)\backslash C[t]| \neq 1$, то положим $t = t+1$ и перейдем к **Шагу 3**, в противном случае положим $C_{|T(G)|} \equiv C'$, где $\{C'\} = T(G)\backslash C[t]$, и **Алгоритм завершен.**

Замечание 2.1.2 *Легко видеть, что функция F_G, построенная при применении описанного алгоритма, является цикловой расцветкой графа G.*

Теорема 2.1.10 *Пусть $G \in A$ является циклически-связанным графом. Для того, чтобы существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение графа G, необходимо, чтобы для $\forall C \in T(G)$ и любого направления τ обхода цикла C не существовало гетерополярной циклической (F_G, τ, C)-кости в графе G.*

Теорема 2.1.11 *Пусть $G \in A$ является абсолютно циклически-связанным, двудольным графом. Для того, чтобы существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение графа G, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall C \in T(G)$ и любого направления τ обхода цикла C не существовало гетерополярной циклической (F_G, τ, C)-кости в графе G.*

Из теорем 2.1.1, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.10 вытекает

Теорема 2.1.12 *Пусть $G \in A$ является связным графом. Для того, чтобы существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение графа G, необходимо, чтобы для $\forall G' \in Constr(G)$, не являющегося деревом, для $\forall C \in T(G')$ и любого направления τ обхода цикла C не существовало гетерополярной циклической $(F_{G'}, \tau, C)$-кости в графе G'.*

На рисунке 1 представлен граф, для которого не существует локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения, но удовлетворяются условия теоремы 2.1.12.

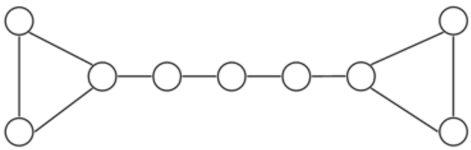

Рис. 1: Пример, показывающий недостаточность условия теоремы 2.1.12.

Данный пример доказывает недостаточность условия теоремы 2.1.12.

Из теорем 2.1.1, 2.1.6, 2.1.8, 2.1.11 вытекает

Теорема 2.1.13 *Пусть $G \in A$ является двудольным связным графом. Для того, чтобы существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение графа G, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall G' \in Constr(G)$, не являющегося деревом, для $\forall C \in T(G')$ и любого направления τ обхода цикла C не существовало гетерополярной циклической $(F_{G'}, \tau, C)$-кости в графе G'.*

В §2.2 для некоторых частных классов графов исследована задача о существовании локально-сбалансированного$_2$ 2-разбиения графа.

Пусть G – дерево и $x \in V(G)$ – его произвольная вершина.

Допустим, что имеется некоторое разбиение множества $V(G)\backslash\{x\}$ на подмножества $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, удовлетворяющее условиям:

$$V(G)\backslash\{x\} = A(x) \cup B(x) \cup C(x),$$
$$A(x) \cap B(x) = \emptyset, \quad B(x) \cap C(x) = \emptyset, \quad A(x) \cap C(x) = \emptyset.$$

Для $\forall u \in V(G)\backslash N_{ex_G(x)}(x)$ положим:

$$a(u) \equiv |\{v \in N_{\rho_G(x,u)+1}(x) / (u,v) \in E(G), v \in A(x)\}|,$$
$$b(u) \equiv |\{v \in N_{\rho_G(x,u)+1}(x) / (u,v) \in E(G), v \in B(x)\}|,$$
$$c(u) \equiv |\{v \in N_{\rho_G(x,u)+1}(x) / (u,v) \in E(G), v \in C(x)\}|.$$

Замечание 2.2.1 *Из определения функций* a, b, c *вытекает, что если при* $\forall i$, $1 \leq i \leq ex_G(x)$, *для всех* $u \in N_i(x)$ *уже определено, какое из соотношений* $u \in A(x)$, $u \in B(x)$, $u \in C(x)$ *является верным, то для* $\forall u \in N_{i-1}(x)$ *значения* $a(u)$, $b(u)$ *и* $c(u)$ *однозначно определяются.*

Множества $A(x), B(x), C(x)$ определим индуктивно следующим образом.

$$N_{ex_G(x)}(x) \subseteq B(x),\ N_{ex_G(x)}(x) \cap A(x) = \emptyset,\ N_{ex_G(x)}(x) \cap C(x) = \emptyset.$$

Пусть при $\forall i$, $2 \leq i \leq ex_G(x)$, уже определено разбиение множества $N_i(x)$:

$$N_i(x) = (N_i(x) \cap A(x)) \cup (N_i(x) \cap B(x)) \cup (N_i(x) \cap C(x)).$$

Из замечания 2.2.1 следует, что значения функций a, b, c для $\forall u \in N_{i-1}(x)$ могут быть вычислены.

Определим разбиение множества $N_{i-1}(x)$ следующим образом: для $\forall u \in N_{i-1}(x)$

$$u \in \begin{cases} A(x), & \text{если } 1 \leq b(u) - (d_G(u) - b(u)) \leq 2, \\ B(x), & \text{если } -1 \leq a(u) - (d_G(u) - a(u)) \leq 0, \\ C(x), & \text{если неравенства } 1 \leq b(u) - (d_G(u) - b(u)) \leq 2, \\ & -1 \leq a(u) - (d_G(u) - a(u)) \leq 0 \text{ являются неверными.} \end{cases}$$

Легко видеть, что таким образом множества $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ определены однозначно, причем

$$V(G) \backslash \{x\} = A(x) \cup B(x) \cup C(x),$$
$$A(x) \cap B(x) = \emptyset, \quad B(x) \cap C(x) = \emptyset, \quad A(x) \cap C(x) = \emptyset.$$

Ясно также, что определены функции:

$$a : (V(G) \backslash N_{ex_G(x)}(x)) \to Z_+, \quad b : (V(G) \backslash N_{ex_G(x)}(x)) \to Z_+,$$
$$c : (V(G) \backslash N_{ex_G(x)}(x)) \to Z_+.$$

Доказана

Теорема 2.2.1 *Для того, чтобы для дерева* G *существовало локально-сбалансированное*$_2$ *2-разбиение, необходимо и достаточно, чтобы для* $\forall u \in V(G) \backslash N_{ex_G(x)}(x)$ *одновременно выполнялись неравенства:*

$$b(u) - (d_G(u) - b(u)) \leq 2 \quad \text{и} \quad a(u) - (d_G(u) - a(u)) \leq 0.$$

Исследованы также вопросы о существовании локально-сбалансированных$_2$ 2-разбиений для простых циклов и полных графов.

Теорема 2.2.2 *Для графа* C_n *существует локально-сбалансированное*$_2$ *2-разбиение при любом* $n \geq 3$.

Теорема 2.2.3 *Для графа K_n существует локально-сбалансированное$_2$ 2-разбиение при любом n.*

В третьей главе исследованы модифицированные версии основных задач диссертационной работы.

В §3.1 рассмотрены задачи расширения частичных 2-разбиений до локально-сбалансированных 2-разбиений.

Пусть G – дерево и $x \in V(G)$ – его произвольная вершина, а $g : V_g \to \{0,1\}$, где $V_g \subseteq V(G)$, – его частичное 2-разбиение.

Дадим индуктивное определение частично определенной функции $z_g : V(G) \to \{0,1\}$.

Без потери общности можно считать, что $|V(G)| > 1$.

Для всех вершин $\nu \in V_g$ положим $z_g(\nu) \equiv g(\nu)$.

Пусть функция z_g на всех вершинах множества $(N_{ex_G(x)} \cup N_{ex_G(x)-1}) \backslash V_g$ не будет определена.

Пусть при $i, 0 \le i < ex_G(x) - 1$, значение функции z_g на любой вершине $\nu \in N_{i+2}(x)$ или уже определено или установлено, что z_g не должна быть определена на ν.

Для каждой вершины $u \in N_i(x) \backslash V_g$, если существует вершина $u^{+1} \in N_{i+1}(x)$, такая, что $(u^{+1})^{-1} = u$ и
$|S_{1-0}(\lambda_1(u^{+1}) \cap N_{i+2}(x) \cap D(z_g), z_g)| - |(\lambda_1(u^{+1}) \cap N_{i+2}(x)) \backslash D(z_g)| > 0$ (если таковых несколько, то выберем любую), то положим:

$$z_g(u) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } S_{1-0}(\lambda_1(u^{+1}) \cap N_{i+2}(x) \cap D(z_g), z_g) > 0, \\ 1, & \text{если } S_{1-0}(\lambda_1(u^{+1}) \cap N_{i+2}(x) \cap D(z_g), z_g) < 0, \end{cases}$$

в противном случае функция z_g на вершине u не будет определена.

Определим множество $V_{[g,x]}$.

Положим $V_{[g,x]} \equiv D(z_g)$.

Дадим определение частичного 2-разбиения $[g,x] : V_{[g,x]} \to \{0,1\}$, являющегося расширением g.

Для любого $u \in V_{[g,x]}$ положим $[g,x](u) \equiv z_g(u)$.

Теорема 3.1.1 *Для того, чтобы для дерева G существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение, являющееся расширением частичного 2-разбиения g дерева G, необходимо и достаточно, чтобы существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение дерева G, являющееся расширением частичного 2-разбиения $[g,x]$ дерева G.*

Доказана

Теорема 3.1.2 *Для того, чтобы для дерева G существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение, являющееся расширением частичного 2-разбиения $[g,x]$ дерева G, необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины $\nu \in V(G)$ выполнялось неравенство*

$$|S_{1-0}(\lambda_1(\nu) \cap V_{[g,x]}, [g,x])| - |\lambda_1(\nu) \backslash V_{[g,x]}| \le 1.$$

Из теорем 3.1.1 и 3.1.2 вытекает следуюшая

Теорема 3.1.3 *Для того, чтобы для дерева G существовало локально-сбалансированное$_1$ 2-разбиение, являющееся расширением частичного 2-разбиения g дерева G, необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины* $\nu \in V(G)$ *выполнялось неравенство*

$$||S_{1-0}(\lambda_1(\nu) \cap V_{[g,x]}, [g,x])| - |\lambda_1(\nu) \backslash V_{[g,x]}|| \leq 1.$$

Для дерева найдено достаточное условие (теорема 3.1.4) существования локально-сбалансированного$_2$ 2-разбиения, являющегося расширением данного частичного 2-разбиения. Приведен пример (Рис. 3.1), показывающий, что условие теоремы 3.1.4 не является необходимым.

В §3.2 рассмотрены задачи о существовании 2-разбиений, подчиняющихся приоритету.

Проведено обсуждение взаимосвязей между различными типами подчинений приоритету при различных определениях окрестности вершины.

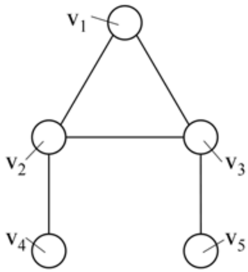

Рис. 2: Пример графа.

Взаимосвязь между гибким и жестким подчинением приоритету$_1$.

Обозначим через G_1 граф, представленный на рисунке 2.

Рассмотрим следующие приоритеты$_1$:

$$g_1 : V(G_1) \to \{-1, 0, 1\},$$
$$g_1(v_1) = 0,\ g_1(v_2) = -1,\ g_1(v_3) = 1,\ g_1(v_4) = 1,\ g_1(v_5) = 1,$$
$$g_2 : V(G_1) \to \{-1, 0, 1\},$$
$$g_2(v_1) = 0,\ g_2(v_2) = -1,\ g_2(v_3) = 1,\ g_2(v_4) = 1,\ g_2(v_5) = -1,$$

- Для графа G_1 существует 2-разбиение, гибко подчиняющееся приоритету$_1$ g_1, и не существует 2-разбиения, жестко подчиняющегося приоритету$_1$ g_1.

- Для графа G_1 не существует 2-разбиения, гибко подчиняющегося приоритету$_1$ g_2, и существует 2-разбиение, жестко подчиняющееся приоритету$_1$ g_2.

Следовательно, в общем случае, существование для данного графа 2-разбиения, гибко подчиняющегося данному приоритету$_1$, не влечет существования 2-разбиения, жестко подчиняющегося тому же приоритету$_1$, и наоборот.

Взаимосвязь между гибким и жестким подчинением приоритету$_2$.

Положим $G_2 \equiv K_n$, где $n \in N$, $n \geq 3$ – нечетное число, и пусть $V(G_2) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Рассмотрим следующие приоритеты$_2$:

$$g_3 : V(G_2) \to \{-1, 1\}, \text{так что для } \forall u \in V(G_2)$$

$$g_3(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v_k, \text{ где } 1 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ -1, & \text{если } u = v_k, \text{ где } \lceil \frac{n}{2} \rceil < k \leq n, \end{cases}$$

$$g_4 : V(G_2) \to \{1\}.$$

- Для графа G_2 существует 2-разбиение, гибко подчиняющееся приоритету$_2$ g_3, и не существует 2-разбиения, жестко подчиняющегося приоритету$_2$ g_3.
- Для графа G_2 не существует 2-разбиения, гибко подчиняющегося приоритету$_2$ g_4, и существует 2-разбиение, жестко подчиняющееся приоритету$_2$ g_4.

Следовательно, в общем случае, существование для данного графа 2-разбиения, гибко подчиняющегося данному приоритету$_2$, не влечет существования 2-разбиения, жестко подчиняющегося тому же приоритету$_2$, и наоборот.

Для дерева найдено необходимое и достаточное условие (теорема 3.2.1) существования 2-разбиения, гибко подчиняющегося заданному приоритету$_1$.

Для дерева найдено необходимое и достаточное условие (теорема 3.2.2) существования 2-разбиения, жестко подчиняющегося заданному приоритету$_1$.

Для дерева найдено необходимое и достаточное условие (теорема 3.2.3) существования 2-разбиения, гибко подчиняющегося заданному приоритету$_2$.

Для дерева найдено достаточное условие (теорема 3.2.4) существования 2-разбиения, жестко подчиняющегося заданному приоритету$_2$. Приведен пример (Рис 3.3), показывающий, что условие теоремы 3.2.4 не является необходимым.

Основные результаты и выводы

- Доказано, что основные задачи диссертационной работы являются NP-полными в классе двудольных графов.
- При некоторых ограничениях на структуру циклов получено необходимое и достаточное условие существования локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения двудольного графа.
- Для дерева получено необходимое и достаточное условие существования локально-сбалансированного$_2$ 2-разбиения.
- Для дерева получено необходимое и достаточное условие существования локально-сбалансированного$_1$ 2-разбиения, являющегося расширением данного частичного 2-разбиения.
- Для дерева получено достаточное условие существования локально-сбалансированного$_2$ 2-разбиения, являющегося расширением данного частичного 2-разбиения.
- Для дерева получены необходимые и достаточные условия существования 2-разбиения, гибко подчиняющегося приоритету$_i$, $i = 1, 2$.
- Для дерева получено необходимое и достаточное условие существования 2-разбиения, жестко подчиняющегося приоритету$_1$, а также достаточное условие существования 2-разбиения, жестко подчиняющегося приоритету$_2$.

Литература

1. May K.O. The origin of the four-color conjecture. *Isis*, 56:346–348, 1965.
2. Harary F. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
3. Appel K., Haken W. Every planar map is four colorable. Part I. Discharging. *Illinois J. Math*, 21:429–490, 1977. MR 58:27598d.
4. Appel K., Haken W., Koch J. Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility. *Illinois J. Math*, 21:491–567, 1977. MR 58:27598d.
5. Kempe A.B. On the geographical problem of four colours. *Amer. J. Math.*, 2:193–204, 1879.
6. Grünbaum B. Grötzsch's theorem on 3-colorings. *Michigan Math. J.*, 10:303–310, 1963.
7. Brooks R.L. On coloring the nodes of a network. In *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, number 37, pages 194–197, 1941.
8. Borodin O.V.,Kostochka A.V. On an upper bound of a graph's chromatic number depending on the graph's degree and density. *J. Combin. Theory, Ser. B*, 23:247–250, 1977.
9. Коршунов А.Д. О хроматическом числе n-вершинных графов. *Методы дискретного анализа в теории булевых функций и схем*, 35:15–44, 1980.
10. Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, New York, 1972.
11. Ehrlich G., Even S., Tarjan R.E. Intersection graphs of curves in the plane. *J. Combinatorial Theory, Ser. B*, 21:8–20, 1976.
12. Garey M.R., Johnson D.S., Miller G.L., Papadimitriou C.H. unpublished results. *(A1.1; A11.1; A12)*, 1978.
13. Walsh A.M., Burkhard W.A. Efficient algorithms for (3,1) graphs. *Information Sci.*, 13:1–10, 1977.
14. Ершов А.П. Сведение задачи распределения памяти при составлении программ к задаче раскраски вершин графов. *ДАН СССР*, 142(4):785–787, 1962.
15. Krarup I., de Werra D. Chromatic optimization: Limitations, Objectives, Uses, References. *European Journal of Oper. Research*, 11(1):1–19, 1982.
16. Cockayne E.J., Thomason A.G. Ordered Colourings of Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Ser B*, 32:286–292, 1982.
17. Berge C. *Graphs and Hypergraphs*. Elsevier Science Ltd, 1985.
18. Doerr B. Partial Colorings of Unimodular Hypergraphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 29:359–363, 2007.
19. Doerr B. Balanced Coloring: Equally Easy for All Numbers of Colors? In *STACS '02: Proceedings of the 19th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, pages 112–120, London, UK, 2002. Springer-Verlag.

20. Yuster R. Equitable Coloring of k-Uniform Hypergraphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 16(4):524–532, 2003.

21. de Werra D. On good and equitable colorings. In *Cahiers du C.E.R.O.*, volume 17, pages 417–426. 1975.

22. Kostochka A.V. Equitable colorings of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics*, 258:373–377(5), 2002.

23. Kratochvil J. Complexity of Hypergraph Coloring and Seidel's Switching. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 29th International Workshop, WG 2003, Elspeet, The Netherlands, Revised Papers*, volume 2880, pages 297–308, June 19-21 2003.

24. Gerber M.U.,Kobler D. Algorithmic approach to the satisfactory graph partitioning problem. *European Journal of Operational Research*, 125:283–291(9), 2000.

25. Gerber M.U.,Kobler D. Partitioning a graph to satisfy all vertices. *Technical report, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne*, 1998.

26. Vanderpooten D. Bazgan C., Tuza Z. The satisfactory partition problem. *Discrete Appl. Math.*, 154(8):1236–1245, 2006.

Перечень публикаций по теме диссертации

1. С.В. Баликян, Р.Р. Камалян. Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$. *Доклады НАН РА*, 105(1):21–27, 2005.

2. С.В. Баликян, Р.Р. Камалян. Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$ при расширенном определении окрестности вершины. *Доклады НАН РА*, 106(3):218–226, 2006.

3. Баликян С.В. О локально-сбалансированных 2-разбиениях некоторых двудольных графов. В *Сборнике тезисов XV Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование»*, № 15, с. 9, Дубна, Россия, 28 января - 2 февраля 2008.

4. S.V. Balikyan. On Existence of certain Locally-balanced 2-partition of a Tree. In *Mathematical Problems of Computer Science*, volume 30, pages 25–30. Yerevan, 2008.

5. S.V. Balikyan, R.R. Kamalian. On Existence of 2-partition of a Tree, which obeys the Given Priority. In *Mathematical Problems of Computer Science*, volume 30, pages 31–35. Yerevan, 2008.

Ս. Վ. Բալիկյան
Գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված 2-տրոհումների մասին

Ամփոփագիր

Գրաֆների գագաթային ներկումները ունեն ինչպես մեծ տեսական արժեք, այնպես էլ կարևոր կիրառական նշանակություն, քանի որ դրանք սերտորեն կապված են այնպիսի խնդիրների հետ, ինչպիսիք են օպտիմալ կարգացուցակների կառուցումը, ծրագրերի աշխատանքի համար անհրաժեշտ հիշողության մինիմիզացումը, զուգահեռ հաշվարկներում օգտագործվող պրոցեսորների քանակի մինիմիզացումը և այլն: Ճիշտ գագաթային ներկումների ուսումնասիրությունների զարգացման ընթացքում ուշադրության արժանացան նաև հատուկ տեսակների գագաթային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները:

Ներկայացված ատենախոսությունում ևս դիտարկվում են այդպիսի խնդիրներ:

$G(V,E)$ գրաֆի v գագաթի համար սահմանենք բազմություններ՝

$$\lambda_1(v) \equiv \{\omega \in V(G)/(\omega,v) \in E(G)\}\,,\ \lambda_2(v) \equiv \{v\} \cup \lambda_1(v):$$

G գրաֆի 2-տրոհում կոչվում է $f:V(G) \to \{0,1\}$ ֆունկցիան: G գրաֆի մասնակի 2-տրոհում կոչվում է $g:V_g \to \{0,1\}$ ֆունկցիան, որտեղ $V_g \subseteq V(G)$: G գրաֆի g_1 մասնակի 2-տրոհումը հանդիսանում է G գրաֆի g_2 մասնակի 2-տրոհման ընդլայնում, որտեղ $V_{g_2} \subseteq V_{g_1}$, եթե $\forall v \in V_{g_2}$ գագաթի համար $g_1(v) = g_2(v)$: G գրաֆի f 2-տրոհումը կոչվում է լոկալ-հավասարակշռված$_i$, $i \in \{1,2\}$, եթե $\forall v \in V(G)$ գագաթի համար

$$||\{\omega \in \lambda_i(v)/\ f(\omega)=1\}| - |\{\omega \in \lambda_i(v)/\ f(\omega)=0\}|| \le 1:$$

$p:V(G) \to \{-1,0,1\}$ ֆունկցիան կոչվում է նախապատվություն$_i$ G-ում, եթե $\forall v \in V(G)$ գագաթի համար $p(v)=0 \Leftrightarrow |\lambda_i(v)|$ զույգ է: G գրաֆի f 2-տրոհումը կոշտ ենթարկվում է p նախապատվությանը$_i$, $i \in \{1,2\}$, եթե $\forall v \in V(G)$ գագաթի համար

$$|\{\omega \in \lambda_i(v)/\ f(\omega)=1\}| - |\{\omega \in \lambda_i(v)/\ f(\omega)=0\}| = p(v):$$

G գրաֆի f 2-տրոհումը ճկուն ենթարկվում է p նախապատվությանը$_i$, $i \in \{1,2\}$, եթե $\forall v \in V(G)$ գագաթի համար

$$|\{\omega \in \lambda_i(v)/\ f(\omega)=f(v)\}| - |\{\omega \in \lambda_i(v)/\ f(\omega)=1-f(v)\}| = p(v):$$

Ատենախոսությունում դիտարկվող խնդիրները, մշակված մեթոդները, ալգորիթմները և ստացված արդյունքները կարող են կիրառվել այնպիսի համակարգերի մաթեմատիկական մոդելավորման համար, որոնց սուբյեկտները

ենթակա են երկու հակադիր ազդեցությունների և պահանջվում է նվազեցվել կոնֆլիկտների հավանականությունը:

Ատենախոսության հիմնական արդյունքներն են.

- ապացուցված է երկկողմանի գրաֆների լոկալ-հավասարակշռված$_i$ 2-տրոհումների, $i \in \{1,2\}$, գոյության խնդիրների NP-լրիվությունը,
- ցիկլերի կառուցվածքի վրա դրված որոշ սահմանափակումների ներքո ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման երկկողմանի գրաֆի լոկալ-հավասարակշռված$_1$ 2-տրոհման գոյության համար,
- ծառի համար ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման լոկալ-հավասարակշռված$_2$ 2-տրոհման գոյության համար,
- ծառի համար ստացված է տրված մասնակի 2-տրոհման ընդլայնում հանդիսացող լոկալ-հավասարակշռված$_1$ 2-տրոհման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման,
- ծառի համար ստացված է տրված մասնակի 2-տրոհման ընդլայնում հանդիսացող լոկալ-հավասարակշռված$_2$ 2-տրոհման գոյության բավարար պայման,
- ծառի համար ստացված են տրված նախապատվությանը$_i$, $i \in \{1,2\}$, ճկուն ենթարկվող 2-տրոհման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ,
- ծառի համար ստացված է տրված նախապատվությանը$_1$ կոշտ ենթարկվող 2-տրոհման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման,
- ծառի համար ստացված է տրված նախապատվությանը$_2$ կոշտ ենթարկվող 2-տրոհման գոյության բավարար պայման:

Suren V. Balikyan

On locally-balanced 2-partitions of graphs