ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Խեիրոլլահ Ռահսեփար Ֆարդ

ԼԱԳՐԱՆԺԻ ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.07 "Հաշվողական մաթեմատիկա" մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ 2011

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Kheirollah Rahsepar Fard

On Mean-Value Multivariate Lagrange Interpolation

Avtoreferat

of dissertation for requesting the degree of candidate of physical and mathematical sciences specializing in 01.01.07 "Computational Mathematics"

Yerevan 2011

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Սահակյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Գ. Քթրյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ
Պաշտպանությունը կայանալու է 2011թ. նոյեմբերի 30 -ին, ժ. 15^{00} -ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 "Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն" մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ա. Մանուկյան 1:
Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Ե ՊՀ-ի գրադարանում:
Սեղմագիրը առաքված է 2011թ. հոկտեմբերի 28 -ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար,
ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկնածու Վ. Դումանյան

Dissertation topic was approved in the Yerevan State University

Scientific adviser:	Doctor of phys.-math. sciences	H. Hakopian
Oficial reviewers:	Doctor of phys.-math. sciences	A. Sahakyan
	Candidate of phys.-math. sciences	G. Ktryan

Leading organizatin: Institute of Mathematics of NAS of Armenia

Defense of the thesis will be held at the meeting of the Specialized council 044 of the Yerevan State University (0025, Yerevan, A. Manoogian Str.1) on November 30, 2011 at 15^{00}.

The dissertation is avialable in the library of YSU.
Avtoreferat was sent on October 28, 2011.

Scientific secratery of the specialized council,
Candidate of phys.-math. sciences V. Dumanyan

General characterization of the work

Actuality of the Problem

Often, in applications it becomes necessary to replace the functions by another, in some sense more simple, functions. There are different methods of such a replacement of functions. Among these methods the most popular is the interpolation as well as approximation. The problem of univariate polynomial interpolation was considered already by Lagrange and Newton who got fundamental results in this field. It should be noted that in the univariate case this problem was widely discussed and the problems of both theoretical and practical interest mainly got their complete solutions. In the case of multivariate interpolation situation is quite different. In fact the main investigations in this area started only in last four to five decades. As it turns out despite the univariate case the correctness (unisolvence) of multivariate interpolation essentially depends on the geometrical distribution of interpolation nodes. The first major results in multivariate polynomial interpolation were obtained by Berzolari, Radon, as well as by Chung and Yao.

At the present stage of this theory significant results were obtained by Boyanov, deBoor, Gasca, Lorenz and other mathematicians. Multivariate polynomial interpolation is a basic tool in applied mathematics and it has applications in many areas, including numerical methods, computed tomography, and computer aided geometric designs. Note that unlike the univariate polynomial interpolation in higher dimensions even many fundamental problems still remain open.

In the thesis we discuss the problem of correctness of a multivariate mean-value Lagrange interpolation, where interpolation parameters are integrals over certain sets of finite and non-zero Lebesgue measure. It is worth noting an important fact that the Lagrange mean-value interpolation is applicable in the case of integrable functions while the pointwise interpolation may be inapplicable since in this case the pointwise values of the function may not be defined.

The Aim of the Thesis

The aim of the present work is to investigate the correctness of certain mean-value multivariate interpolation problems. We give a complete characterization of the problem in a special case where the mean-values are taken over measurable sets which are shifts of an arbitrary fixed set with finite non-zero

Lebesgue measure. We characterize certain cases of non-correct interpolation over circles. The correctness of the problem in dimension two for other special cases also is considered.

The Methods of the Investigation

The methods of the theory of univariate and multivariate polynomial interpolation are used. Also some methods of Linear Algebra and Culculus are used.

Scientific innovation

- The correctness of mean-value interpolation problem in dimension two and degree not exceeding one with cut-regions is established.
- The correctness of mean-value interpolation problem in dimension two and degree not exceeding one in each variable with circles is proved.
- The correctness of mean-value multivariate interpolation problem for arbitrary dimension and arbitrary degree of polynomials over the collection of shifts of a Lebesgue measurable set of finite non-zero measure is characterized.
- The mean-value Lagrange interpolation problem for dimension two and arbitrary degree of polynomials over the collection of circles in a general case is proved to be non-correct.

Theoretical and Practical value

The results obtained in the thesis have theoretical content and at the same time they are directed toward the area of applications. In practice, the results can be used in recovering of functions from given interpolation data and in sampling, i.e., simplifying given complicated functions. Also the results can be used in approximation theory, in multivariate Lagrange interpolation, in numerical analysis.

Approbation of the Results

The results of the thesis have been presented in the following international conferences:

- The Applied Mathematics Conference, Zahedan, Iran, 2010, March 10-12.
- The International Conference of the Jangjeon Mathematical Society, Iran-South Korea, Ahvaz, Iran, 2010 Febreury 8-10.

The results also were presented at

- The general seminar of the Faculty of Informatics and Applied Mathematics of Yerevan State University, 22 September 2011.

Publications
The results of the thesis were published in four scientific articles in the Journals which we bring at the end of the Avtoreferat.

The Structure and Volume of the Ph. D. Thesis
The thesis consists of preface, three chapters, conclusion and list of references. The publications of author are eight articles. The number of references is 55. The volume of the thesis is 78 pages.

The main content of the thesis
Chapter 1. First we introduce the univariate interpolation problem. Then we introduce the multivariate mean value interpolation problem. In order to give a precise description of the problem we bring some definitions and introduce the relevant notation.
The space of interpolation polynomials in k variables of total degree not exceeding n is denoted by $\Pi_n^k = \Pi_n(\mathbb{R}^k)$, i.e.,

$$\Pi_n^k = \{p(x) = \sum_{|\gamma|\le n} a_\gamma x^\gamma : a_\gamma \in \mathbb{R}\},$$

where

$$x = (x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^k, \gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_k) \in \mathbb{Z}_+^k,$$

$$x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \cdots x_k^{\gamma_k}, |\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k \le n.$$

Also denote by $N := N_k \coloneqq \mathrm{N(n,k)} := \mathrm{d}im\Pi_n^k = \binom{n+k}{k}$, the dimension of interpolation space.
Denote by

$$\mathcal{X}_s = \{x^{(1)}, \cdots, x^{(s)}\} \subset \mathbb{R}^k$$

a set of distinct nodes of interpolation.
The classic Lagrange interpolation parameters are the values of a function at given nodes.
Definition 1.3.1 *The Lagrange interpolation problem* $(\Pi_n^k, \mathcal{X}_s)$ *is called correct (poised), if for any values* $\{c_1, \cdots, c_s\}$ *there exists a unique polynomial* $p \in \Pi_n^k$, *satisfying the conditions* $p(x^{(i)}) = c_i, i = 1, \dots, s$.
In other words, the Lagrange interpolation problem is to find a unique polynomial of the form

$$p(x) = \sum_{|\gamma| \le n} a_\gamma x^\gamma \in \Pi_n^k$$

such that

$$p(x^{(i)}) = \sum_{|\gamma| \le n} a_\gamma (x^{(i)})^\gamma = c_i, \ i = 1, \ldots, s. \qquad (1.3.1)$$

The correctness of interpolation means that (1.3.1) considered as linear system has a unique solution for arbitrary right hand side values. A necessary condition for this is that the number of unknowns equals the number of equations, i.e.,

$$s = N.$$

We know that in this case the linear system (1.3.1) has a unique solution for arbitrary values $\{c_1, \ldots, c_s\}$, if and only if the corresponding homogeneous system has only trivial solution. In other words we have

Proposition 1.3.1 *The Lagrange pointwise interpolation problem* $(\Pi_n^k, \mathcal{X}_N)$ *is correct if and only if* $p \in \Pi_n^k, p(x^{(i)}) = 0, i = 1, \ldots, N \Rightarrow p = 0$.

Equivalently, the interpolation problem $(\Pi_n^k, \mathcal{X}_N)$ is not correct if and only if

$$\exists p \in \Pi_n^k, p \neq 0, \ p(x^{(i)}) = 0, i = 1, \ldots, N. \qquad (1.3.2)$$

Here, we consider two general correct problems [1]. We denote by same letter, say h, both the hyperplane and its equation, i.e., $h(x) = 0$, where $h \in \Pi_1^k$.

Definition 1.3.2.1.1 The set of nodes I, #I = $dim\Pi_n^{k-1}$ lying on a hyperplane h is called basic in h for the space of polynomials Π_n^k, or just Π_n^k - basic in h, if each polynomial of Π_n^k vanishing at I vanishes identically in h, i.e.,

$$\forall p, p \in \Pi_n^k, \mathrm{p} = 0 \ \text{ on I} \Rightarrow p = 0 \ \ on\ h.$$

The following theorem of Bezout is a basic tool in interpolation [1].

Theorem 1.3.2.1.1 (Bezout) Assume that $p \in \Pi_n^k$ and h is a hyperplane in $\mathbb{R}^k$. Then, p has linear factor h if p vanishes at h:

$$p = 0 \ on\ h \Longrightarrow p = hq, q \in \Pi_n^{k-1}.$$

Definition 1.3.2.1.2 The set of nodes $\chi \subset \mathbb{R}^k$, $\#\chi = N(n,k)$ is called Berzolari-Radon set, if there are n + 1 hyperplanes $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ such that:

$\binom{k+n-1}{k-1}$ of them are Π_n^k-basic in h_1

$\binom{k+n-2}{k-1}$ of them are Π_{n-1}^k-basic in h_2 and they do not belong to h_1, and so on.

Finally,

$\binom{k-1}{k-1}$ of them belongs to $h_{n+1} \backslash \{h_1 \cup h_2 \cup \ldots \cup h_n\}$.

Note that the number of the nodes lying on all hyperplanes is

$$\binom{k+n-1}{k-1} + \binom{k+n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} = N.$$

Proposition 1.3.2.1.1 ([1, 2]) *Each set of nodes* $\chi \subset \mathbb{R}^k$, $\#\chi = N(n,k)$ *satisfying the Berzolari-Radon construction is a poised set for interpolation with* Π_n^k.

In the next theorem we bring the description of Chung and Yao natural lattice:

Definition 1.3.2.2.2 *Let h be a hyperplane. A set of nodes $\chi \subset h$ is said to satisfy geometric characterization for Π_n^k (GC_n^k for short), if*

1. $\#\chi = N(n,k)$
2. *For each fixed node $A \in \chi$ there are n hyperplanes $h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A$ in h whose union contains all the nodes of χ but not A.*

Let us note that the second condition means that the fundamental polynomial for the node A is a product of linear factors:

$$p_A^* = \gamma_A . h_1^A . h_2^A \dots h_n^A,$$

where $h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A$ are the hyperplanes which union contains $\chi \backslash A$ and also γ_A is constant. In this case we say that the node A uses the hyperplanes $h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A$. Thus, in view of Proposition 1.3.2.1.1 each GC_n set is Π_n^k - poised. In particular, from Proposition 1.3.2.1.1 follows that all nodes of a GC_n set are not contained in the union of n hyperplanes. Therefore, the number of hyperplanes used by a node in GC_n sets is exactly n.

Let us denote the set of hyperplanes used by the node $A \in \chi$ by

$$H_{A,X} = \{h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A\}.$$

Definition 1.3.2.2.3 We say that the set of hyperplanes $H = \{h_1, \dots, h_l\}, l \geq k$ is in general position in $\mathbb{R}^k$, if the intersection of each distinct k hyperplanes of H is exactly one point and intersection of each k + 1 hyperplanes is empty.

Next let us bring examples of some sets satisfying the geometric characterization of Chung-Yao.

The Natural Lattice of Chung-Yao. We start with

Definition 1.3.2.2.4 *The set of nodes $\chi \subset \mathbb{R}^k$, $\#\chi = N$ is called a natural lattice of degree n in $\mathbb{R}^k$ or briefly NL_n, if there are $n+k$ hyperplanes $H = \{h_1, \dots, h_{n+k}\}$ in general position, the set of all intersection nodes of which form χ.*

Thus, the set of intersection nodes of arbitrary $n+k$ hyperplanes in general position form a GC_n set. The following theorem of Chung and Yao takes place:

Theorem 1.3.2.2.1 (Chung-Yao) *Let the set of $n+k$ hyperplanes be in general position. Then the natural lattice generated by these hyperplanes is poised for interpolation with Π_n^k .*

The Newton Lattice. One can define the Newton lattice of degree n as image of the set

$$\{\alpha \in Z_+^k, \ |\alpha| \leq n\}$$

under an arbitrary linear transform. This is a special case of Berzolari-Radon construction. Therefore it is a poised set for Π_n^k, too.

Next we introduce mean value interpolation (MVI) problem. We consider a mean-value Lagrange interpolation problem where interpolation parameters are integrals over certain sets.

Definition 1.4.3.3 *Let* $\mathbb{D} = \{\Delta_i \subseteq \mathbb{R}^k : i = 1, \dots, N\}$ *be a collection of N* *measurable subsets of* $\mathbb{R}^k$ *with finite nonzero Lebesgue mesures. The problem of finding polynomial* $p \in \Pi_n^k$ *such that*

$$\int_{\Delta_i} p(x)dx = c_i, \quad i = 1, \dots, N, \qquad (1.4.3.3)$$

where c_i *are arbitrary given numbers, is called MVI problem.*
We denote this MVI problem by $(\Pi_n^k, \mathbb{D})$.

Definition 1.4.3.4 *The problem* $(\Pi_n^k, \mathbb{D})$ *is called correct if for any numbers* c_i, $i = 1, \dots, N$ *there exists a unique polynomial* $p \in \Pi_n^k$ *satisfying (1.4.3.3)*

Next we are going to consider Kergin interpolation which is based on some mean-values over (k-1) dimensional simplexes.

Kergin Interpolation. The correct interpolation schemes considered so far have one important property in common: the dimension of the interpolation spaces coincides with the number of interpolation nodes. A different approach has been taken by Kergin, 1980 ([19]). He gives a linear projection from the space $C^n(\mathbb{R}^k)$ (continuous differentiable functions on $\mathbb{R}^k$) onto the space of polynomials of degree not exceeding n. He constructed, for given nodes $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^k$, an interpolation polynomial of degree not exceeding n. This interpolant becomes unique because of additional interpolation constraints. Let us bring some notation for the differential operators which will appear in this research. For $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}_+^k$ we denote by D^α the differential operator

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial {\xi_1}^{\alpha_1} \dots . \partial {\xi_k}^{\alpha_k}}, \qquad x = (\xi_1, \dots, \xi_k),$$

and, for a polynomial $p \in \Pi_n^k$, we write

$$p(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^k} a_\alpha D^\alpha,$$

for the associated differential operator. If v is a point in $\mathbb{R}^k$, we denote by D_v the directional derivative operator, which corresponds to the linear polynomial $p(x) = v \cdot x$, $x \in \mathbb{R}^k$, where $\cdot$ denotes the Euclidian product in $\mathbb{R}^k$. Likewise, repeated directional derivative with respect to v, denoted by D_v^n, corresponds to the polynomial $p(x) = (v \cdot x)^n$, $x \in \mathbb{R}^k$. Denote also a convex hull of a set X by $[X]$, i.e.,

$$[X] = \left\{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^{(i)}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, i = 0, \dots, n\right\} \text{ where } X = \left\{x^{(0)}, \dots, x^{(n)}\right\} \subset \mathbb{R}^k.$$

More precisely, we have the following result,

Theorem 1.4.3.2 *(Kergin) For any set of* $n+1$ *points* $\mathrm{x}^{(0)}, \dots, \mathrm{x}^{(n)} \in \mathbb{R}^k$ *there is a unique mapping* $p: C^n(\mathbb{R}^k) \mapsto \Pi_n^k$ *with the property that for any* $f \in C^n(\mathbb{R}^k)$, *any constant coefficient homogeneous differential operator* $q(D)$, $q \in \Pi_n^k$, *and any subset* $J \subseteq \{0, \dots, k\}$, *with* $\#J = deg q + 1$, *there exists a* *point x in the convex hull $[X]$, $X=\{x^{(j)}: j\in J\}$ such that*

$$\big(q(D)P_f\big)(x)=\big(q(D)f\big)(x). \qquad (1.4.3.4)$$

Next we are going to present the mean-value interpolation introduced by Hakopian.

Definition 1.4.3.4 *We say that a finite set of nodes $X\subset\mathbb{R}^k$ is in general position if $vol_k([Y])\neq 0$ for any $Y\subseteq X$ with $\#Y\geq k+1$.*

Let us denote $X(j):=\{V\subseteq X:\#V=j\}, 0\leq j\leq |X|$ for an arbitrary finite set $X\subset\mathbb{R}^k$.

Theorem 1.4.3.4 (Hakopian) *Suppose that the node set $X=\{\mathrm{x}^{(0)},\dots,\mathrm{x}^{(\mathrm{r})}\}\subset\mathbb{R}^k$ with $r\geq k+1$ is in general position. Then for arbitrary values*
there exists a unique polynomial $p\in\Pi_{r+1-k}(\mathbb{R}^k)$ such that

$$\frac{1}{vol_{k-1}[V]}\int_{[V]} p d\mu_{k-1}=\lambda_v, V\in X(k),$$

where $[V]$ is the convex hull of the set V.

Chapter 2. Here we consider the MVI problem in dimension two.

Definition 2.1.1 *We call a set L of lines in the plane to be in general position if any two lines intersect at a point and no third line is passing through those intersection points.*

For a set of lines in general position, we call cut regions the bounded regions whose boundary points belong to the lines while no interior point is such. In other words, cut regions are bounded regions cut by the given set of lines.

For $n+3$ lines in general position, we have the following.

Lemma 2.1.1 *Let the lines $L_1,\dots,L_{n+3}$ be in general position, where $n\geq 0$. Then, there are exactly $\binom{n+2}{2}$ cut regions.*

Then, we present a conjecture proposed by Hakopian and prove it in a special case.

Conjecture. *Let the lines $L_1,L_2,\dots,L_{n+3}$ be in general position. Then, mean value interpolation with Π_n and cut regions is correct.*

Theorem 2.2.1.1 *Suppose that the lines $L_1,\dots,L_4$ are in general position. Then, the mean value interpolation with Π_1 and three cut regions is correct.*

Next, via the definition of $\Pi^2_{1,1}$, we consider another special case of this problem called rectangular pointwise interpolation.

Let

$$p\in\Pi^2_{1,1}\Leftrightarrow p(x,y)=a+bx+cy+dxy. \qquad (2.3.1)$$

Here we consider the correctness of the interpolation problem in two different ways: by using pointwise interpolation and mean-value interpolation with circles.

The first one is a special case of the well-known tensor product interpolation:

The Lagrange poitwise interpolation problem with $\Pi^2_{1,1}$ is correct if the nodes are vertices of a rectangle whose sides are parallel to the coordinate axes.

Next, we consider rectangular mean-value Lagrange interpolation problem where interpolation parameters are integrals over certain circles. In this case we are going to find a unique polynomial $p \in \Pi^2_{1,1}$ such that

$$(1/\mu_2(D_i)) \int \int_{D_i} p(x,y)dxdy = c_i, \quad i = 1, \dots, 4, \tag{2.3.3}$$

where c_i's are arbitrary given numbers and D_i's are circles with arbitrary radii and centers at vertices of a *rectangle whose sides are parallel to the coordinate axes.*

We denote this mean-value interpolation problem by $(\Pi^2_{1,1}, \mathbb{C})$, where $\mathbb{C}$ is the set of the above circles:

$$\mathbb{C} = \{D_i : i = 1, \dots, 4\}.$$

We have:

Theorem 2.3.1. *The mean-value interpolation problem $(\Pi^2_{1,1}, \mathbb{C})$ is correct.*

Chapter 3. In this chapter we introduce MVI problem in higher dimension. Let Δ be a set in $\mathbb{R}^k$. The following set we call λ- shift of Δ

$T_\lambda(\Delta) := \lambda + \Delta := \{y + \lambda : y \in \Delta\}$ where $\lambda \in \mathbb{R}^k$ and $vol_k(\Delta) \neq 0$.

Let us fix a set of N distinct nodes $\Lambda := \{\lambda_i : i = 1, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^k$.

The following set we call the set of Λ - shifts of Δ:

$$T_\Lambda(\Delta) := \{T_\lambda(\Delta) : \lambda \in \Lambda\}.$$

In the following theorem we give a simple characterization of the correctness of mean-value interpolation with Π^k_n and $T_\Lambda(\Delta)$, i.e., $(\Pi^k_n, T_\Lambda(\Delta))$.

Theorem 3.2.1 *The mean-value Lagrange interpolation problem $(\Pi^k_n, T_\Lambda(\Delta))$ is correct if and only if the Lagrange pointwise interpolation problem (Π^k_n, Λ) is correct.*

the following linear transformation

$$L : \Pi^k_n \to \Pi^k_n \text{ given by } L[p](\lambda) := \int_\Delta p(x - \lambda) d\mu, p \in \Pi^k_n.$$

The proof of Theorem 3.2.1 is based on the following

Proposition 3.2.1 *The linear transformation L is one to one.*

Then we consider two important applications of Theorem 3.2.1.

Denote by

$$B_r(\mathrm{a}) := \{x : \| x - a \| \leq r\}$$

the ball with center $a \in \mathbb{R}^k$ and radius r.

Consider an arbitrary set of N distinct balls in $\mathbb{R}^k$ of same radius r:

$$\mathbb{B} := \{B_r(a_i) : i = 1, \dots, N\}.$$

Corollary 3.3.1. *The mean-value interpolation problem $(\Pi^k_n, \mathbb{B})$ is correct if and only if the Lagrange pointwise interpolation problem (Π^k_n, A) is correct, where $A = \{a_i : i = 1, \dots, N\}$ is the set of centers of the balls.*

Now we consider the second correct MVI problem. Let a number $k \in \mathbb{Z}_+$ and arbitrary points $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}^k$ be given such that $vol_k(S) \neq 0$, where S is the simplex $[a_0, \dots, a_k]$.
It is convenient for us to introduce the Newton lattice for Π_{n-1}^k inside the simplex S as follows:

$$\Lambda_N := \Lambda_N(n) = \{x_\gamma = a_0 + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \gamma_i (a_i - a_0) : \gamma \in \Gamma\},$$

where $\Gamma = \{\gamma : \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{Z}_+^k, \quad |\gamma| \leq n-1\}$.
Here we consider a correct mean-value interpolation based on the Newton lattice. We are going to recover a function integrable on S by using interpolation parameters that are its mean-values over some smaller similar simplexes s_γ inside S. Namely, the small simplexes are:

$$s_\gamma = [x_\gamma, x_\gamma + \frac{1}{n}(a_1 - a_0), \dots, x_\gamma + \frac{1}{n}(a_k - a_0)],$$

where $x_\gamma \in \Lambda_N$, $\gamma \in \Gamma$. Set also

$$s = [0, \frac{1}{n}(a_1 - a_0), \dots, \frac{1}{n}(a_k - a_0)].$$

The set of small simplexes coincides with $T_{\Lambda_N}(s)$, i.e., the set of Λ_N – shifts of the simplex s.

Corollary 3.3.2.1. *The mean-value interpolation problem* $(\Pi_{n-1}^k, T_{\Lambda_N}(s))$ *is correct.*

At the end, we present a non-correct problem for general degree in dimension two.
Let us consider mean-value interpolation with polynomials of arbitrary degree with regions some of which are concentric circles while the others are arbitrary.
Denote by $[n]$ the greatest integer less than or equal to n.

Theorem 3.4.1.1 *Suppose that among the regions of mean-value interpolation problem* $(\Pi_n^2, \mathbb{D})$ *there are* $[n/2] + 2$ *concentric circles, where* $n \geq 1$. *Then the mean- value interpolation problem* $(\Pi_n^2, \mathbb{D})$ *is not correct.*

Finally, we mention the following our conjecture which is based on evaluations by *Mathematica programme:*

Conjecture. *Suppose that among regions of interpolation problem* $(\Pi_n^2, \mathbb{D})$ *there are* $n+2$ *circles of same radius with centers on a straight line, where* $n \geq 1$. *Then the mean-value interpolation problem* $(\Pi_n^2, \mathbb{D})$ *is not correct.*

It is easy to show that the number $(n+2)$ can not be decreased.

List of publications of the Author in the Journals

1. Kh. Rahsepar Fard, An approach to interpolation by integration, *Proceedings of the Yerevan State University*, 2 (2009) 21-25.
2. Kh. Rahsepar Fard, Bivariate mean value interpolation on circles, Известия НАН Армении, Математика, том 46, No. 1, 2011, 71-74.
3. Kh. Rahsepar Fard, Mean Value multivariate interpolation with shifted sets, East Journal on Approximations, Vol. 17, No. 2, 2011, 151-157.
4. Kh. Rahsepar Fard, B. Yazdizadeh, Bivariate mean value interpolation with application to moment of inertia, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society, Vol. 14, No. 3, 2011, 333-337.*

ԱՄՓՈՓՈՒՄ

Խեիրոլլահ Ռահսեփար Ֆարդ

ԼԱԳՐԱՆԺԻ ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐՈՎ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ՄԻՋԱՐԿՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Աշխատանքում քննարկվում է Լագրանժի միջին արժեքներով բազմաչափ միջարկման խնդրի ճշգրտության հարցը, որտեղ միջարկման պարամետրերը ինտեգրալներ են որոշ վերջավոր ոչ զրո Լեբեգի չափով բազմություններով: Հարկ է նշել մի կարևոր հանգամանք, որ միջին արժեքներով միջարկումը կիրառելի է ինտեգրելի ֆունկցիաների դեպքում, մինչդեռ կետային միջարկումը կարող է և կիրառելի չլինել, քանի որ նշված ֆունկցիաների կետային արժեքները կարող են և որոշված չլինել:

Նախ դիտարկում ենք միջին արժեքներով երկչափ միջարկումը: Կասենք որ հարթության մեջ գտնվող ուղիղների բազմությունը ընդհանուր դրության մեջ է, եթե ցանկացած երկու ուղիղ հատվում են մեկ կետում և որևէ երրորդ ուղիղ չի անցնում այդ հատման կետով:

Մեկը չգերազանցող գումարային աստիճանի բազմանդամների համար ունենք հետևյալ արդյունքը

■ Ենթադրենք $L_1,\ldots,L_4$ ուղիղները ընդհանուր դրության մեջ են: Այդ դեպքում միջին արժեքներով երկչափ միջարկումը հարթությունից ուղիղներով կտրված սահմանափակ տիրույթներով և Π_1^2-ով ճշգրիտ է:

Մենք դիտարկում ենք միջին արժեքներով երկչափ միջարկման խնդիրը նաև ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի մեկը չգերազանցող աստիճանի բազմանդամներով՝

$$p \in \Pi_{1,1}^2 \Leftrightarrow p(x,y) = a + bx + cy + dxy.$$

■ Միջին արժեքներով երկչափ միջարկումը ճշգրիտ է $\Pi_{1,1}^2$-ով և $\mathbb{C} = \{C_1,\ldots,C_4\}$-ով, որտեղ C_i-երը կամայական շառավիղներով շրջաններ են, որոնց կենտրոնները կոորդինատական առանցքներին զուգահեռ կողմերով ուղղանկյան գագաթներն են:

Այնուհետև մենք քննարկում ենք Լագրանժի միջին արժեքներով բազմաչափ միջարկման խնդիրը այնպիսի բազմություններով, որոնք բոլորը մի վերջավոր ոչ զրո Լեբեգի չափով բազմության տեղաշարժեր են:

Նշանակենք $\mathrm{T}_\lambda(\Delta)$-ով Δ բազմության λ–տեղաշարժը՝

$$T_\lambda(\Delta) := \lambda + \Delta \coloneqq \{y + \lambda : y \in \Delta\},$$

որտեղ $\lambda \in \mathbb{R}^k, vol_k(\Delta) \neq 0.$

Տեղաշարժերի տրված բազմության $\Lambda := \{\lambda_i : i = 1,\ldots,N\} \subset \mathbb{R}^k$ համար նշանակենք $T_\Lambda(\Delta) := \{\mathrm{T}_\lambda(\Delta) : \lambda \in \Lambda\}$-ով Δ բազմության Λ - տեղաշարժերի

բազմությունը:
Մենք տալիս ենք Π_n^k-ով և $T_\Lambda(\Delta)$-ով միջին արժեքներով բազմաչափ միջարկման խնդրի՝ $(\Pi_n^k, \mathrm{T}_\Lambda(\Delta))$-ի ճշգրտության հետևյալ պարզ բնութագիրը
■ *Միջին արժեքներով* $(\Pi_n^k, T_\Lambda(\Delta))$ *Լագրանժի միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ճշգրիտ է Լագրանժի կետային միջարկման* (Π_n^k, Λ) *խնդիրը:*
Նշանակենք $B_{a,r} := \{x: \| x - a \| \le r\}$-ով $a \in \mathbb{R}^k$ կենտրոնով և r շառավղով գունդը: Դիտարկենք $\mathbb{R}^k$-ում նույն շառավղով ցանկացած N տարբեր գնդերի

$$\mathbb{B} := \{B_{a_i,r} : i = 1, \dots, N\}$$

բազմությունը: Մենք նախորդ ընդհանուր արդյունքից ստանում ենք
■ *Գնդերով միջին արժեքներով* $(\Pi_n^k, \mathbb{B})$ *Լագրանժի միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ ճշգրիտ է Լագրանժի կետային միջարկման* (Π_n^k, A) *խնդիրը, որտեղ* $A = \{a_i : i = 1, \dots, N\}$- *գնդերի կենտրոնների բազմությունն է:*
Հաջորդ կարևոր հետևանքը ստանում ենք հետևյալ դեպքի համար: Դիցուք S-ը $[a_0, \dots, a_k]$ սիմպլեքս է $a_i \in \mathbb{R}^k$ գագաթներով իսկ $s = [0, \frac{1}{n}(a_1 - a_0), \dots, \frac{1}{n}(a_k - a_0)]$. Մենք բաժանում ենք S-ը $N(n,k)$ փոքր սիմպլեքսների բազմության՝ $T_{\Lambda_N}(s)$, որը s-ի Λ_N-տեղաշարժների բազմությունն է: Այժմ քանզի Λ_N բազմությունը կազմում է Նյուտոնի ցանց Π_{n-1}^k-ի համար, մենք ստանում ենք.
■ *Միջին արժեքներով* $(\Pi_{n-1}^k, T_{\Lambda_N}(s))$ *Լագրանժի միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է:*
Այնուհետև մենք դիտարկում ենք միջին արժեքներով միջարկման խնդիրը $\mathbb{R}^2$-ում այն դեպքում երբ որոշ արամետրեր համակենտրոն շրջաններով միջին արժեքներ են: Դիցուք $\mathbb{D}$-ն նշված շրջանները պարունակող բազմությունն է և : Այդ դեպքում ունենք
■ *Միջին արժեքներով* $(\Pi_n^2, \mathbb{D})$ *Լագրանժի միջարկման խնդիրը ճշգրիտ չէ, եթե* $\mathbb{D} -$ *նպարունակում է* $[n/2] + 2$ *համակենտրոն շրջան:*

Վերջում նշենք մեր հետևյալ վարկածը, որը հիմնված է *Mathematica* ծրագրով հաշվարկների վրա՝
■ *Միջին արժեքներով* $(\Pi_n^2, \mathbb{D})$ *Լագրանժի միջարկման խնդիրը ճշգրիտ չէ, եթե* $\mathbb{D} -$ *նպարունակում է* $n + 2$ *նույն շառավղով շրջաններ,* $n \ge 1$ *, որոնց կենտրոնները գտնվում են մեկ ուղղի վրա :*
Հեշտ է կառուցել օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ $n + 2$ թիվը այստեղ հնարավոր չէ փոքրացնել:

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хейроллах Рахсепар Фард

О МНОГОМЕРНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЛАГРАНЖА ПО СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЯМ

В работе обсуждается вопрос корректности задачи многомерной среднезначной интерполяции Лагранжа, где параметрами интерполяции являются интегралы по некоторым множествам конечной и ненулевой меры Лебега. Следует отметить одно важное обстоятельство - среднезначная интерполяция Лагранжа применима в случае интегрируемых функциий хотя поточечная интерполяция может быть и неприменимой так как в этом случае поточечные значения интегрируемых функциий могут быть и неопределенными.

Сначала рассматриваем задачу двумерной среднезначной интерполяции Лагранжа.

Скажем, что множество прямых на плоскости находится в общем положении, если каждые две прямые пересекаются в одной точке и никакая другая прямая не проходит через эту точку.

Для многочленов суммарной степени не превышающей единицы имеем:

■ Предположим, что прямые $L_1, \ldots, L_4$ находятся в общем положении. Тогда двумерная среднезначная интерполяция Лагранжа с Π_1^2 и отрезананными прямыми от плоскости ограниченными областями является корректной.

Мы рассматриваем двумерную среднезначеную интерполяцию Лагранжа также с многочленами степени не превышающей единицы по каждой отдельной переменной:

$$p \in \Pi_{1,1}^2 \Leftrightarrow p(x,y) = a + bx + cy + dxy.$$

■ Двумерная среднезначная интерполяции Лагранжа с $\Pi_{1,1}^2$ и с $\mathbb{C} = \{C_1, \ldots, C_4\}$ является корректной, где C_i круги с произвольными радиусами центры которых - вершины любого прямоугольника, стороны которого параллельны координатным осям.

Далее мы обсуждаем многомерную среднезначную интерполяцию Лагранжа по множествам, каждое из которых является сдвигом одного фиксированного множества, Лебегова мера которого конечна и отлична от нуля. Пусть $\mathrm{T}_\lambda(\Delta)$ есть λ–сдвиг множества Δ, т.е., $T_\lambda(\Delta) := \lambda + \Delta \coloneqq \{y + \lambda : y \in \Delta\}$, где $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $vol_k(\Delta) \neq 0$. Для данного множества сдвигов $\Lambda := \{\lambda_i : i = 1, \ldots, N\} \subset \mathbb{R}^k$, обозначим через $T_\Lambda(\Delta) := \{\mathrm{T}_\lambda(\Delta) : \lambda \in \Lambda\}$

множество Λ-сдвигов множества Δ.

Мы даем простую характеристику корректности многомерной среднезначной интерполяции Лагранжа с Π_n^k и с $T_\Lambda(\Delta)$, т.е., $(\Pi_n^k, T_\Lambda(\Delta))$:

■ Задача многомерной среднезначной интерполяции Лагранжа $(\Pi_n^k, T_\Lambda(\Delta))$ корректна тогда и только тогда когда корректна задача многомерной поточечной интерполяции Лагранжа (Π_n^k, Λ).

Обозначим через $B_{a,r} := \{x: \| x - a \| \leq r\}$ шар радиуса r с центром $a \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^k$ множество любых разных N разных шаров одного радиуса $\mathbb{B} := \{B_{a_i,r}: i = 1, \ldots, N\}$.

С предидущего общего результата мы получаем

■ Задача многомерной среднезначной интерполяции Лагранжа с шарами $(\Pi_n^k, \mathbb{B})$ корректна тогда и только тогда когда корректна задача многомерной поточечной интерполяции Лагранжа (Π_n^k, A), где $\mathrm{A} = \{\mathrm{a_i}: \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N}\}$ есть множество центров шаров.

Как важное следствие отметим также следующий случай. Пусть S симплекс $[a_0, \ldots, a_k]$ с вершинами $a_i \in \mathbb{R}^k$ и $s = [0, \frac{1}{n}(a_1 - a_0), \ldots, \frac{1}{n}(a_k - a_0)]$. Мы разделяем S на множество $N(n,k)$ маленких симплексов $T_{\Lambda_N}(s)$, которое есть множество Λ_N-сдвигов s. Теперь заметим, что множество Λ_N является сеткой Ньютона для Π_{n-1}^k. Отсюда мы получаем

■ Задача среднезначной интерполяции Лагранжа $(\Pi_{n-1}^k, T_{\Lambda_N}(s))$ является корректной.

Далее мы рассматриваем среднезначную интерполяцию Лагранжа в $\mathbb{R}^2$ в случае когда некоторые параметры являются средными значениями по кругам фиксированного центра.

Пусть $\mathbb{D}$ множество содержащее указанные круги. Тогда имеем

■ Задача среднезначной интерполяции Лагранжа $\left(\Pi_n^2, \mathbb{D}\right)$ является некорректной, если $\mathbb{D}$ содержит $[n/2] + 2$, $n \geq 1$, кругов центры которых совпадают.

В конце отметим следующую нашу гипотезу, основанной на вычислений по программе *Mathematica*

■ Задача среднезначной интерполяции Лагранжа $\left(\Pi_n^2, \mathbb{D}\right)$ является некорректной, если $\mathbb{D}$ содержит $\mathrm{n} + 2, \mathrm{n} \geq 1$, кругов одного радиуса центры которых находятся на одной прямой.

Отметим, что легко построить пример показываюший что число $n + 2$ здесь невозможно уменьшить.