ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Նուրի Աիմադ Սուլեյման

ԲԵԶԻԵՅԻ ԿՈՐԵՐՈՎ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ
ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ

Ա.01.07 “Հաշվողական մաթեմատիկա”
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2014

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Nouri Ahmad Suleiman

DEVELOPMENT OF ALGORITHMS FOR
DATA FITTING BY BEZIER CURVES

SYNOPSIS

of the thesis for requesting the degree of candidate of
physical and mathematical sciences specializing in
01.01.07 «Computational Mathematics»

Yerevan – 2014

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար`   ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Ռ. Հակոբյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ`   ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր   Ա.Հ. Հովհաննիսյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Գ. Մանուկյան

Առաջատար կազմակերպություն`   Ճարտարապետության և շինարարության Հայաստանի ազգային համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2014թ. հունիսի 17-ին, ժ.15^{00} -ին
ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա»
մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով`
0025 Երևան, Ա.Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2014թ. մայիսի 14-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր   Վ.Ժ. Դումանյան

The topic of the thesis was approved in Yerevan State University

Scientific adviser: doctor of phys.-math. sciences Yu.R. Hakopian

Official reviewers: doctor of phys.-math. sciences   A.H. Hovhannisyan
candidate of phys.-math. sciences   A.G. Manukyan

Leading organization: National University of Architecture and Construction of Armenia

Defense of the thesis will be held at the meeting of the specialized council
044 “Mathematical Cybernetics” in the Yerevan State University
on June 17, 2014 at 15^{00} at the following address:
0025 Yerevan, A.Manoogian st.1.

The thesis is available in the library of YSU.

Synopsis was sent on May 14, 2014.

Scientific secretary of the specialized council,
doctor of phys.-math. sciences   V.Zh. Dumanyan

GENERAL CHARACTERIZATION OF THE THESIS

The thesis is devoted to development of numerical algorithms for data fitting problem by least squares method using quadratic and cubic Bezier curves. Below we give briefly a general characterization of the present investigation.

Actuality of the Subject. The least squares method is one of the most efficient tools for data processing. The best fit in the least squares sense is the model for which the sum of squared residuals has its smallest value, a residual being the difference between an observed value and the value given by the model. For this purpose algebraic polynomials, exponential, logarithmic and other functions were commonly used. More recently, in connection with the development of computer technologies, along with the above mentioned classic functions, great attention is paid to the use of parametric curves and, in particular, splines and Bezier curves. Using parametric curves makes their representation independent of the choice of co-ordinate axes. Least squares curve fitting has found many applications in computer graphics, automatic design, pattern recognition and etc.

Least squares problems fall into two categories, linear and nonlinear. The linear problem has a closed form solution while the nonlinear one leads to quite complicated computations. Parametric curve fitting is just a nonlinear problem. There are different approaches to solve this problem, each having its advantages and disadvantages. In recent years, the need in creating effective computational algorithms for data fitting problems has been greatly increased and stimulates the working out new numerical methods and their theoretical substantiation.

The Aim of the Thesis. The aim of the work is the development of a technique to construct quadratic and cubic Bezier curves that solve data fitting problem by the least squares method. In solving that problem, the shape of the curve depends on the choice of the curve points which we put into correspondence to data points, so-called *parameterization*. It should be noted that parameterization is the principal and the most difficult problem to be solved during the process of approximation. One may to follow different ways to determine the points of curve mentioned above, depending on the aim pursued. However, all currently existing approaches to solving the parameterization problem are far from be perfect. In connection with the foregoing, in the present study the following main tasks were set:

- development of numerical algorithms for solving the least squares problem by using quadratic and cubic Bezier curves;
- solution of the parameterization problem in the most natural for data fitting form by putting the requirement of minimality of the distance from a data point to the desired curve;
- construction of approximating quadratic and cubic Bezier curves with fixed endpoints;
- construction of approximating quadratic and cubic Bezier curves with loose endpoints.

Object of Investigation. Quadratic and cubic Bezier curves for data fitting by the least squares method.

Methods of Investigation. The methods of numerical analysis, linear algebra, matrix analysis and calculus have been used.

Scientific Innovation. In the thesis we develop effective and quite simple implemented algorithms to solve the problem of constructing quadratic and cubic Bezier curves that approximate data by the least squares method. The direct solution of the parameterization problem, implying the requirement of minimality of the distance from the point to the desired curve, leads to a rather complicated problem of nonlinear optimization. In order to circumvent this serious from a computational point of view obstacle, in the present work we propose a practical solution of the problem via constructing so called *minimizing sequences* of the control points. Such an approach allows to reduce the problem to be solved to a series of linear least squares problems.

Theoretical and Practical Value. The results obtained in the thesis have theoretical content and at the same time they are directed toward applications. They can be used in development of effective data fitting computational procedures.

Approbation of the Results. The results of the thesis were presented at the seminars of the Chair of Numerical Analysis and Mathematical Modeling of Yerevan State University and at the general seminar of the Faculty of Informatics and Applied Mathematics, Yerevan State University.

Publications. The results of the thesis were published in three scientific articles.

Structure and Volume of the Thesis. The thesis consists of introduction, two chapters, conclusion and the list of references. The number of references is 37. The volume of the work is 80 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

In the **Introduction** the actuality of the topic is discussed, the aim and the problems of the thesis are formulated.

Let us give first the main definition. The Bezier curve is a parametric curve that is a polynomial function of the parameter t. The curve of degree n is defined as follows. Given points $P_0, P_1, \ldots, P_n$ the Bezier curve is

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i, \qquad t \in [0,1] \tag{1}$$

where $\binom{n}{i}$ is the binomial coefficient. The points $P_i, i = 0,1,\ldots,n$ are called *control points* of the Bezier curve. Two are *endpoints*: P_0 is the *origin* endpoint and P_n is the *destination* endpoint.

In **Chapter 1** we consider data fitting problem by the least squares method with quadratic Bezier curves

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \qquad t \in [0,1] \tag{2}$$

where $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ are control points. The problem will be formulated below.

In Section 1.1 the problem to determine the distance from a point to a quadratic Bezier curve (2) is set. This problem is an important component part of computational algorithms in data fitting by the least squares method.

Having a point $q(\xi, \eta)$, define a function

$$f(t) = |B(t) - q|^2 .$$

Let us formulate the following problem.

Problem 1.1.1.[1] *Find a value* $t^* \in [0,1]$ *such that*

$$f(t^*) = \min_{0 \le t \le 1} f(t) .$$

[1] The numbering of problems, statements and definitions is given in accordance with the text of the thesis.

As a matter of fact, the value t^* minimizes the distance from the point q to the curve $B(t)$, i.e., $B(t^*)$ is the point on the curve $B(t)$ closest to the point q. From now on t^* will be referred to as a *knot*. The function $f(t)$ is a polynomial of fourth degree. To solve the Problem 1.1.1, we have to find the roots of the equation $f'(t)=0$. Thus, the problem to determine the distance from a point to the quadratic Bezier curve is reduced to the one to find the roots of the polynomial of third degree.

The Section 1.2 has an auxiliary nature. There is derived a computational procedure for calculating the real roots of cubic polynomials.

In Section 1.3 an algorithm **Bezier2Dist**$[P_0, P_1, P_2, q, \varepsilon \Rightarrow t^*, D^*]$ to determine the distance from a point q to a given quadratic Bezier curve (2) is derived. The input data of the algorithm are control points P_0, P_1, P_2, the point q and the accuracy of calculation ε. The output data are the knot t^* and the square of deviation $D^* = |B(t^*) - q|^2$.

The Section 1.4 is devoted to data fitting by quadratic Bezier curves with fixed endpoints P_0 and P_2. Note that this version will be used further as an essential component part of more general formulation of the problem.

Let a set of data points

$$q_i(\xi_i, \eta_i), \qquad i = 1,2,\dots,N \tag{3}$$

where $N \geq 2$, is given. Suppose a set of knots $T = (t_1, t_2, \dots, t_N)$ is somehow specified. The following notation will be used:

$$E(P_1;T) \equiv \sum_{i=1}^{N} |B(t_i) - q_i|^2 \tag{4}$$

The problem of data fitting by Bezier curve (2) with fixed endpoints in the least squares sense is usually formulated as follows:

find a control point $P_1(x_1, y_1)$ for which the sum of square deviations (4) accepts the minimum value.

In a solution of the raised problem, the shape of the curve is influenced by the choice of the knots t_i, $i = 1,2,\dots,N$ which we put into correspondence to the data points (3). This is so-called *parameterization* problem. One may to follow different ways to determine the knots, depending on the aim pursued. It should be said that the matter of choosing the knots is one of the key items in data fitting problem.

Here we will consider a version of data fitting by the least squares method. For each data point q_i, $1 \leq i \leq N$ we assign the knot t_i^d which minimizes the distance from that point to the desired curve, i.e.,

$$|B(t_i^d) - q_i| = \min_{0 \leq t \leq 1} |B(t) - q_i|.$$

Let $T^d = (t_1^d, t_2^d, \dots, t_N^d)$. Formulate the following problem.

Problem 1.4.1. *Find a control point P_1 for which the sum*

$$E(P_1;T^d) = \sum_{i=1}^{N} |B(t_i^d) - q_i|^2$$

accepts the minimum value.

Obviously, that in the raised problem the knots $t_i^d \in [0,1]$, $i = 1,2,\dots,N$ depend on the control points of the curve. This relationship is nonlinear and is given implicitly. In this way we encounter with sufficiently complicated kind of nonlinear optimization. Therefore, here we develop another approach and instead of the Problem 1.4.1 solve a related problem the essence of which is to build a so-called *minimizing sequence* of control points (see below Definition 1.4.1). This approach reduces the problem of approximation to a series of linear least squares problems. To this end we formulate first an intermediate "weak" problem.

Problem 1.4.2. *For a given set of knots* $T=(t_1,t_2,...,t_N)$ *find a control point* $P_1(x_1,y_1)$ *for which the sum* $E(P_1;T)$ *defined in (4) accepts the minimum value.*

In the thesis an algorithm **Bezier2FixEndsGivenKnots**$[P_0,P_2,\{q_i\}_{i=1}^N,T\Rightarrow P_1]$ to find the control point P_1 and, by this very fact, the desired quadratic Bezier curve is constructed.

Let us now introduce a notion. Suppose there is a sequence of control points $P_1^{(k)}$, $k=0,1,...$ Accordingly, there is a sequence of quadratic Bezier curves

$$B^{(k)}(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1^{(k)}+t^2P_2,\qquad k=0,1,...$$

For each point $P_1^{(k)}$ we define a set of knots $T^{(k)}=(t_1^{(k)},t_2^{(k)},...,t_N^{(k)})$ such that

$$|B^{(k)}(t_i^{(k)})-q_i|=\min_{0\le t\le 1}|B^{(k)}(t)-q_i|,\quad i=1,2,...,N.$$

Then, in accordance with (4), let

$$E^{(k)}\equiv E(P_1^{(k)};T^{(k)})=\sum_{i=1}^N|B^{(k)}(t_i^{(k)})-q_i|^2,\qquad k=0,1,... \tag{5}$$

Definition 1.4.1. We say that the control points $P_1^{(k)}$, $k=0,1,...$ form *a minimizing sequence* if

$$E^{(k)}\le E^{(k-1)},\qquad k=1,2,... \tag{6}$$

Let us formulate a new problem which we will consider instead of the Problem 1.4.1.

Problem 1.4.3. *Suppose the endpoints* P_0 *and* P_2 *are given. Construct a minimizing sequence of control points* $P_1^{(k)}$*,* $k=0,1,...$ *and corresponding sequence of quadratic Bezier curves* $B^{(k)}(t)$*,* $k=0,1,...$

We developed the following numerical algorithm to solve the Problem 1.4.3.

Algorithm **Bezier2FixEndsMinimSeq** $[P_0,P_2,\{q_i\}_{i=1}^N,\varepsilon,\delta\Rightarrow P_1^{(k)},B^{(k)}(t),E^{(k)}]$

1. Input $P_0(x_0,y_0)$, $P_2(x_2,y_2)$, $\{q_i(\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^N$, ε,δ.
2. Preprocessing:

   2a. compute control point $P_1^{(0)}(x_1^{(0)},y_1^{(0)})$:

   $$x_1^{(0)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\xi_i,\quad y_1^{(0)}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\eta_i;$$

   2b. get the curve

   $$B^{(0)}(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1^{(0)}+t^2P_2\ ,\qquad t\in[0,1];$$

   2c. for the values $i=1,2,...,N$:

   run the algorithm **Bezier2Dist**$[P_0,P_1^{(0)},P_2,q_i,\varepsilon\Rightarrow t_i^{(0)},D_i^{(0)}]$;

   get $T^{(0)}=(t_1^{(0)},t_2^{(0)},...,t_N^{(0)})$;

   2d. compute

   $$E^{(0)}=\sum_{i=1}^N D_i^{(0)}.$$

3. For the values $k=1,2,...$ while $E^{(k-1)}-E^{(k)}\ge\delta$ do:

   3a. run the algorithm **Bezier2FixEndsGivenKnots**$[P_0,P_2,\{q_i\}_{i=1}^N,T^{(k-1)}\Rightarrow P_1^{(k)}]$.

   3b. get the curve

   $$B^{(k)}(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1^{(k)}+t^2P_2\ ,\qquad t\in[0,1];$$

3c. for the values $i=1,2,\dots,N$:

run the algorithm **Bezier2Dist**$[P_0, P_1^{(k)}, P_2, q_i, \varepsilon \Rightarrow t_i^{(k)}, D_i^{(k)}]$;

get $T^{(k)}=(t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_N^{(k)})$;

3d. compute

$$E^{(k)}=\sum_{i=1}^{N} D_i^{(k)}.$$

3e. Output $P_1^{(k)}, B^{(k)}(t), E^{(k)}$.

End

We prove that the control points $P_1^{(k)}$, $k=0,1,\dots$ calculated by the algorithm **Bezier2FixEndsMinimSeq** actually form a minimizing sequence.

Theorem 1.4.1. *Let the endpoints P_0 and P_2 are fixed. Then for the quantities $E^{(k)}$ computed by the algorithm* Bezier2FixEndsMinimSeq *the relations $E^{(k)} \le E^{(k-1)}$, $k=1,2,\dots$ hold.*

In Section 1.5 we consider data fitting problem for quadratic Bezier curves with loose endpoints. Suppose we have a Bezier curve (2) constructed by control points P_0, P_1, P_2 and a set of knots $T=(t_1, t_2, \dots, t_N)$. Define a sum of square deviations

$$E(P_0, P_1, P_2; T) \equiv \sum_{i=1}^{N} |B(t_i)-q_i|^2. \tag{7}$$

For each data point q_i, $1 \le i \le N$ we assign the knot t_i^d which minimizes the distance from that point to the desired curve, i.e.,

$$|B(t_i^d)-q_i| = \min_{0\le t\le 1} |B(t)-q_i|.$$

Let $T^d=(t_1^d, t_2^d, \dots, t_N^d)$. Formulate the following problem.

Problem 1.5.1. *Find control points P_0, P_1, P_2 for which the sum*

$$E(P_0, P_1, P_2; T^d) \equiv \sum_{i=1}^{N} |B(t_i^d)-q_i|^2$$

accepts the minimum value.

As in previous case (fixed endpoints), here we also encounter with complicated kind of nonlinear optimization. Therefore, here we also develop another approach and instead of the Problem 1.5.1 solve a related problem of constructing a minimizing sequence of control points, as we done in the previous section.

Let us introduce the following notion. Suppose there is a sequence of triples $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k=0,1,\dots$ of control points. Accordingly, there is a sequence of quadratic Bezier curves

$$B^{(k)}(t)=(1-t)^2 P_0^{(k)} + 2t(1-t)P_1^{(k)} + t^2 P_2^{(k)}, \qquad k=0,1,\dots$$

For each triple $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$ we define a set of knots $T^{(k)}=(t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_N^{(k)})$ such that

$$|B^{(k)}(t_i^{(k)})-q_i| = \min_{0\le t\le 1} |B^{(k)}(t)-q_i|, \quad i=1,2,\dots,N.$$

In accordance with (7), let

$$E^{(k)} \equiv E(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}; T^{(k)}) = \sum_{i=1}^{N} |B^{(k)}(t_i^{(k)})-q_i|^2, \qquad k=0,1,\dots \tag{8}$$

Definition 1.5.1. We say that the triples of control points $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k=0,1,\dots$ form a *minimizing sequence* if

$$E^{(k)} \le E^{(k-1)}, \qquad k=1,2,\dots \tag{9}$$

To construct a minimizing sequence of triples of control points we solve first the following "weak" problem.

Problem 1.5.2. *For a given set of knots T find control points $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ for which the sum $E(P_0, P_1, P_2; T)$ defined in (7) accepts the minimum value.*

An algorithm **Bezier2GivenKnots** $[\{q_i\}_{i=1}^{N}, T \Rightarrow P_0, P_1, P_2]$ to find the control points P_0, P_1, P_2 and, by this very fact, the desired quadratic Bezier curve is developed. The theoretical justification of the algorithm was done. Namely, it was shown that the correctness of the algorithm depends on the nonsingularity of a third order matrix $A = [\alpha_{km}]_{k,m=0}^{2}$ the α_{km} entries of which are proportional to the quantities $\sum_{i=1}^{N} t_i^{k+m}(1-t_i)^{4-(k+m)}$. The following statement holds.

Lemma 1.5.1. *If the set of knots $T = (t_1, t_2, ..., t_N)$ contains at least three distinct from each other knots, then the matrix A is positive definite.*

We set the problem which we solve instead of the Problem 1.5.1

Problem 1.5.3. *Construct a minimizing sequence of triples of control points $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,...$ and corresponding sequence of quadratic Bezier curves $B^{(k)}(t)$, $k = 0,1,...$*

Below we give a numerical algorithm to solve the Problem 1.5.3.

Algorithm **Bezier2MinimSeq** $[\{q_i\}_{i=1}^{N}, \varepsilon, \delta \Rightarrow P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, B^{(k)}(t), E^{(k)}]$

1. Input $\{q_i(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^{N}, \varepsilon, \delta$.
2. Preprocessing:
   2a. compute
   $$\xi_{\min} = \min_{1 \le i \le N} \xi_i,\ \ \xi_{\max} = \max_{1 \le i \le N} \xi_i,\ \ \eta_{\min} = \min_{1 \le i \le N} \eta_i,\ \ \eta_{\max} = \max_{1 \le i \le N} \eta_i;$$
   2b. compute control points $P_0^{(0)}(x_0^{(0)}, y_0^{(0)})$, $P_1^{(0)}(x_1^{(0)}, y_1^{(0)})$, $P_2^{(0)}(x_2^{(0)}, y_2^{(0)})$:
   if $\xi_{\max} - \xi_{\min} \ge \eta_{\max} - \eta_{\min}$ then
   $$x_0^{(0)} = \xi_{\min},\ x_2^{(0)} = \xi_{\max},\ x_1^{(0)} = \frac{1}{2}(\xi_{\max} + \xi_{\min}),\ y_0^{(0)} = \eta_{\min},\ y_2^{(0)} = \eta_{\min},\ y_1^{(0)} = \eta_{\max};$$
   otherwise
   $$x_0^{(0)} = \xi_{\min},\ x_2^{(0)} = \xi_{\min},\ x_1^{(0)} = \xi_{\max},\ y_0^{(0)} = \eta_{\min},\ y_2^{(0)} = \eta_{\max},\ y_1^{(0)} = \frac{1}{2}(\eta_{\max} + \eta_{\min});$$
   2c. get the curve
   $$B^{(0)}(t) = (1-t)^2 P_0^{(0)} + 2t(1-t)P_1^{(0)} + t^2 P_2^{(0)}, \quad t \in [0,1];$$
   2d. for the values $i = 1,2,...,N$:
   run the algorithm **Bezier2Dist**$[P_0^{(0)}, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, q_i, \varepsilon \Rightarrow t_i^{(0)}, D_i^{(0)}]$;
   get $T^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, ..., t_N^{(0)})$;
   2e. compute
   $$E^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} D_i^{(0)}.$$
3. For the values $k = 1,2,...$ while $E^{(k-1)} - E^{(k)} \ge \delta$ do:
   3a. run the algorithm **Bezier2GivenKnots**$[\{q_i\}_{i=1}^{N}, T^{(k-1)} \Rightarrow P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}]$;
   if the algorithms has been failed (singularity of the matrix A) set $P_0^{(k)} = P_0^{(k-1)}$,
   $P_2^{(k)} = P_2^{(k-1)}$ and run the algorithm
   Bezier2FixEndsGivenKnots$[P_0^{(k)}, P_2^{(k)}, \{q_i\}_{i=1}^{N}, T^{(k-1)} \Rightarrow P_1^{(k)}]$;

3b. get the curve

$$B^{(k)}(t) = (1-t)^2 P_0^{(k)} + 2t(1-t)P_1^{(k)} + t^2 P_2^{(k)} \quad , \quad t \in [0,1];$$

3c. for the values $i = 1, 2, ..., N$:

run the algorithm **Bezier2Dist**$[P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, q_i, \varepsilon \Rightarrow t_i^{(k)}, D_i^{(k)}]$;

get $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_N^{(k)})$;

3d. compute

$$E^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} D_i^{(k)} .$$

3e. Output $P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, B^{(k)}(t), E^{(k)}$.

End

Then we prove that the algorithm **Bezier2MinimSeq** actually leads to a minimizing sequence.

Theorem 1.5.1. *For the quantities* $E^{(k)}$ *computed by the algorithm* Bezier2MinimSeq *the relations* $E^{(k)} \le E^{(k-1)}$, $k = 1, 2, ...$ *hold.*

In Section 1.6 we present the results of numerical calculations that confirm the practical effectiveness of the proposed approach.

Thus, in Chapter 1 we have developed an approach to solve a problem regarding least squares approximation of data points with quadratic Bezier curves. A solution of the problem has been obtained via constructing a minimizing sequence of control points.

In **Chapter 2** we solve data fitting problem by the least squares method with cubic Bezier curves

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \qquad t \in [0,1] , \tag{10}$$

where $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ are control points.

In Section 2.1 the problem to determine the distance from a point to a cubic Bezier curve (10) is considered. Having a point $q(\xi, \eta)$, define a function

$$f(t) = |B(t) - q|^2 .$$

Problem 2.1.1. *Find a value* $t^* \in [0,1]$ *such that*

$$f(t^*) = \min_{0 \le t \le 1} f(t) .$$

An algorithm **Bezier3Dist**$[P_0, P_1, P_2, P_3, q, \varepsilon \Rightarrow t^*, D^*]$ to solve the Problem 2.1.1 is derived. The input data of the algorithm are control points P_0, P_1, P_2, P_3, the point q and the accuracy of calculation ε. The output data are the knot t^* and the square of deviation $D^* = |B(t^*) - q|^2$.

The Section 2.2 is devoted to data fitting by cubic Bezier curves with fixed endpoints P_0 and P_3. Note that this version, similarly to the case of quadratic Bezier curves, will be used further as a essential component part of more general formulation of the problem.

Let a set of data points

$$q_i(\xi_i, \eta_i), \qquad i = 1, 2, ..., N \tag{11}$$

where $N \ge 3$, is given. Suppose a set of knots $T = (t_1, t_2, ..., t_N)$ is specified in a certain way. The following notation will be used:

$$E(P_1, P_2; T) \equiv \sum_{i=1}^{N} |B(t_i) - q_i|^2 . \tag{12}$$

The problem of data fitting by Bezier curve (10) with fixed endpoints in the least squares sense is usually formulated as follows:

find control points $P_1(x_1, y_1)$ *and* $P_2(x_2, y_2)$ *for which the sum of square deviations (12)*

accepts its minimal value.

In a solution of the raised problem, the shape of the curve is influenced by the choice of the knots t_i, $i = 1,2,...,N$ which we put into correspondence to the data points (11). Here we will follow the approach developed in Chapter 1.

For each data point q_i, $1 \le i \le N$ we assign the knot t_i^d which minimizes the distance from that point to the desired curve, that is,

$$| B(t_i^d) - q_i | = \min_{0 \le t \le 1} | B(t) - q_i | .$$

Let $T^d = (t_1^d, t_2^d, ..., t_N^d)$. Formulate the following problem.

Problem 2.2.1. *Find control points* $P_1(x_1, y_1)$ *and* $P_2(x_2, y_2)$ *for which the sum*

$$E(P_1, P_2; T^d) = \sum_{i=1}^{N} | B(t_i^d) - q_i |^2$$

accepts the smallest value.

By the reason mentioned above, here we will set and solve another least squares type problem related to the Problem 2.2.1. For that let us formulate first an intermediate “weak” problem.

Problem 2.2.2. *For a given set of knots* $T = (t_1, t_2, ..., t_N)$ *find control points* $P_1(x_1, y_1)$ *and* $P_2(x_2, y_2)$ *for which the sum* $E(P_1, P_2; T)$ *defined in (12) accepts the smallest value.*

An algorithm **Bezier3FixEndsGivenKnots** $[P_0, P_3, \{q_i\}_{i=1}^N, T \Rightarrow P_1, P_2]$ to find the control points P_1, P_2 and, by this very fact, the desired cubic Bezier curve is developed. It was shown that the correctness of the algorithm depends on the value of the determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

where $\beta = \sum_{i=1}^{N} t_i^2 (1 - t_i)^4$, $\gamma = \sum_{i=1}^{N} t_i^3 (1 - t_i)^3$, $\delta = \sum_{i=1}^{N} t_i^4 (1 - t_i)^2$. The following statement was proved.

Lemma 2.2.2. *The determinant* Δ *is equal to zero in the following two cases:*

i) *if* $t_i = 0$ *or* $t_i = 1$ *for all* $i = 1,2,...,N$,

ii) *if there exists a non-empty set of knots* $\{t_{i_1}, t_{i_2}, ..., t_{i_s}\}$ *such* $t_{i_1} = t_{i_2} = \cdots = t_{i_s} \equiv t_*$, *where* $t_* \ne 0,1$, *while all remaining knots are equal either to* 0 *or* 1;

otherwise $\Delta \ne 0$.

Let us introduce a notion which we have already used in Chapter 1, when considering quadratic Bezier curves. Suppose there is a sequence of couples $(P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,...$ of control points. Accordingly, we have a sequence of cubic Bezier curves

$$B^{(k)}(t) = (1 - t)^3 P_0 + 3t(1 - t)^2 P_1^{(k)} + 3t^2 (1 - t) P_2^{(k)} + t^3 P_3, \qquad k = 0,1,...$$

For each couple $(P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$ we define a set of knots $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_N^{(k)})$ such that

$$|B^{(k)}(t_i^{(k)}) - q_i| = \min_{0\le t\le 1}|B^{(k)}(t) - q_i|, \quad i = 1,2,\dots,N.$$

In accordance with (12), let

$$E^{(k)} \equiv E(P_1^{(k)}, P_2^{(k)}; T^{(k)}) = \sum_{i=1}^{N} |B^{(k)}(t_i^{(k)}) - q_i|^2, \qquad k = 0,1,\dots \tag{13}$$

Definition 2.2.1. We say that the couples of control points $(P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,\dots$ form *a minimizing sequence* if

$$E^{(k)} \le E^{(k-1)}, \qquad k = 1,2,\dots \tag{14}$$

Let us formulate now a problem which we will consider instead of the Problem 2.2.1.

Problem 2.2.3. *Suppose the endpoints P_0 and P_3 are given. Construct a minimizing sequence of couples of control points $(P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,\dots$ and corresponding sequence of cubic Bezier curves $B^{(k)}(t)$, $k = 0,1,\dots$*

We developed the following numerical algorithm to solve the Problem 2.2.3.

Algorithm **Bezier3FixEndsMinimSeq** $[P_0, P_3, \{q_i\}_{i=1}^N, \delta, \varepsilon \Rightarrow P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, B^{(k)}(t), E^{(k)}]$

1. Input $P_0(x_0, y_0)$, $P_3(x_3, y_3)$, $\{q_i(\xi_i, \eta_i)\}_{i=1}^N$, δ, ε.
2. Preprocessing:
   2a. compute initial control points $P_1^{(0)}$ and $P_2^{(0)}$:
   $$P_1^{(0)} = \frac{1}{N+1}\left(\sum_{i=1}^N q_i + P_0\right), \; P_2^{(0)} = \frac{1}{N+1}\left(\sum_{i=1}^N q_i + P_3\right);$$
   2b. get the curve
   $$B^{(0)}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1^{(0)} + 3t^2(1-t)P_2^{(0)} + t^3 P_3, \quad t \in [0,1];$$
   2c. for the values $i = 1,2,\dots,N$:
   run the algorithm **Bezier3Dist**$[P_0, P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3, q_i, \varepsilon \Rightarrow t_i^{(0)}, D_i^{(0)}]$;
   get $T^{(0)} = (t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_N^{(0)})$;
   2d. compute
   $$E^{(0)} = \sum_{i=1}^N D_i^{(0)}.$$
3. For the values $k = 1,2,\dots$ while $E^{(k-1)} - E^{(k)} \ge \delta$ do:
   3a. run the algorithm **Bezier3FixEndsGivenKnots** $[P_0, P_3, \{q_i\}_{i=1}^N, T^{(k-1)} \Rightarrow P_1^{(k)}, P_2^{(k)}]$;
   3b. get the curve
   $$B^{(k)}(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1^{(k)} + 3t^2(1-t)P_2^{(k)} + t^3 P_3, \quad t \in [0,1];$$
   3c. for the values $i = 1,2,\dots,N$:
   run the algorithm **Bezier3Dist**$[P_0, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3, q_i, \varepsilon \Rightarrow t_i^{(k)}, D_i^{(k)}]$;
   get $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \dots, t_N^{(k)})$;
   3d. compute
   $$E^{(k)} = \sum_{i=1}^N D_i^{(k)}.$$
   3e. Output $P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, B^{(k)}(t), E^{(k)}$.

End

We prove that the couples of control points $(P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,\dots$ calculated by the algorithm **Bezier3FixEndsMinimSeq** form a minimizing sequence, according to the given above Definition 2.2.1.

Theorem 2.2.1. *Let the endpoints* P_0 *and* P_3 *are given. Then for the quantities* $E^{(k)}$ *computed by the algorithm* Bezier3FixEndsMinimSeq *the relations* $E^{(k)} \le E^{(k-1)}$, $k = 1,2,3,...$ *hold.*

In Section 2.3 we consider data fitting problem for cubic Bezier curves with loose endpoints. Suppose we have a Bezier curve (10) constructed by control points P_0, P_1, P_2, P_3 and a set of knots $T = (t_1, t_2, ..., t_N)$. Define a sum of square deviations

$$E(P_0, P_1, P_2, P_3; T) \equiv \sum_{i=1}^{N} | B(t_i) - q_i |^2 . \quad (15)$$

For each data point q_i, $1 \le i \le N$ we assign the knot t_i^d which minimizes the distance from that point to the desired curve, i.e.,

$$| B(t_i^d) - q_i | = \min_{0 \le t \le 1} | B(t) - q_i | .$$

Let $T^d = (t_1^d, t_2^d, ..., t_N^d)$. Formulate the following problem.

Problem 2.3.1. *Find control points* P_0, P_1, P_2, P_3 *for which the sum*

$$E(P_0, P_1, P_2, P_3; T^d) = \sum_{i=1}^{N} | B(t_i^d) - q_i |^2$$

accepts the smallest value.

To avoid complicated kind of nonlinear optimization, here we also instead of the Problem 2.3.1 solve a related problem the essence of which is to build a minimizing sequence of control points, as we done in the previous section.

Suppose a sequence of quads $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)})$, $k = 0,1,...$ of control points is given. Accordingly, we have a sequence of cubic Bezier curves

$$B^{(k)}(t) = (1-t)^3 P_0^{(k)} + 3t(1-t)^2 P_1^{(k)} + 3t^2(1-t) P_2^{(k)} + t^3 P_3^{(k)}, \quad k = 0,1,...$$

For each quad $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)})$ we define a set of knots $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_N^{(k)})$ such that

$$| B^{(k)}(t_i^{(k)}) - q_i | = \min_{0 \le t \le 1} | B^{(k)}(t) - q_i |, \quad i = 1,2,..., N .$$

In accordance with (15), set

$$E^{(k)} \equiv E(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)}; T^{(k)}) = \sum_{i=1}^{N} | B^{(k)}(t_i^{(k)}) - q_i |^2 , \quad k = 0,1,... \quad (16)$$

Definition 2.3.1. Let us say that the quads of control points $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)})$, $k = 0,1,2,...$ form a *minimizing sequence* if

$$E^{(k)} \le E^{(k-1)}, \quad k = 1,2,3,... \quad (17)$$

To construct a minimizing sequence of quads of control points consider first the following "weak" problem.

Problem 2.3.2. *For a given set of knots* T *find control points* $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ *and* $P_3(x_3, y_3)$ *for which the sum* $E(P_0, P_1, P_2, P_3; T)$ *defined in (15) accepts the smallest value*.

An algorithm **Bezier3GivenKnots** $[\{q_i\}_{i=1}^{N}, T \Rightarrow P_0, P_1, P_2, P_3]$ to find the control points P_0, P_1, P_2, P_3 and the desired quadratic Bezier curve is developed. The theoretical justification of the algorithm was carried out. Namely, it was shown that the correctness of the algorithm depends on the nonsingularity of a fourth order matrix $A = [\alpha_{km}]_{k,m=0}^{3}$ the α_{km} entries of which are proportional to the quantities $\sum_{i=1}^{N} t_i^{k+m} (1-t_i)^{6-(k+m)}$. The following statement holds.

Lemma 2.3.1. *If the set of knots* $T=(t_1,t_2,...,t_N)$ *contains at least four distinct from each other knots, then the matrix* A *is positive definite.*

Now we can solve the following problem.

Problem 2.3.3. *Construct a minimizing sequence* $(P_0^{(k)},P_1^{(k)},P_2^{(k)},P_3^{(k)})$, $k=0,1,...$ *of quads of control points and corresponding sequence of cubic Bezier curves* $B^{(k)}(t)$, $k=0,1,...$

We developed a numerical algorithm to solve the Problem 2.3.3.

Algorithm **Bezier3MinimSeq** $[\{q_i\}_{i=1}^N,\delta,\varepsilon \Rightarrow P_0^{(k)},P_1^{(k)},P_2^{(k)},P_3^{(k)},B^{(k)}(t),E^{(k)}]$

1. Input $\{q_i(\xi_i,\eta_i)\}_{i=1}^N,\delta,\varepsilon$
2. Preprocessing:

   2a. compute

   $$\xi_{\min}=\min_{1\le i\le N}\xi_i,\ \ \xi_{\max}=\max_{1\le i\le N}\xi_i,\ \ \eta_{\min}=\min_{1\le i\le N}\eta_i,\ \ \eta_{\max}=\max_{1\le i\le N}\eta_i;$$

   2b. compute control point $P_0^{(0)}(x_0^{(0)},y_0^{(0)})$, $P_1^{(0)}(x_1^{(0)},y_1^{(0)})$, $P_2^{(0)}(x_2^{(0)},y_2^{(0)})$, $P_3^{(0)}(x_3^{(0)},y_3^{(0)})$:

   if $\xi_{\max}-\xi_{\min}\ge\eta_{\max}-\eta_{\min}$ then

   $$x_0^{(0)}=\xi_{\min},\quad y_0^{(0)}=\eta_{\min},$$
   $$x_3^{(0)}=\xi_{\max},\quad y_3^{(0)}=\eta_{\min},$$
   $$x_1^{(0)}=(2\xi_{\min}+\xi_{\max})/3,\quad y_1^{(0)}=\eta_{\max},$$
   $$x_2^{(0)}=(\xi_{\min}+2\xi_{\max})/3,\quad y_2^{(0)}=\eta_{\max};$$

   otherwise

   $$x_0^{(0)}=\xi_{\min},\quad y_0^{(0)}=\eta_{\min},$$
   $$x_3^{(0)}=\xi_{\min},\quad y_3^{(0)}=\eta_{\max},$$
   $$x_1^{(0)}=\xi_{\max},\quad y_1^{(0)}=(2\eta_{\min}+\eta_{\max})/3,$$
   $$x_2^{(0)}=\xi_{\max},\quad y_2^{(0)}=(\eta_{\min}+2\eta_{\max})/3;$$

   2c. get the curve

   $$B^{(0)}(t)=(1-t)^3P_0^{(0)}+3t(1-t)^2P_1^{(0)}+3t^2(1-t)P_2^{(0)}+t^3P_3^{(0)},\quad t\in[0,1];$$

   2d. for the values $i=1,2,...,N$:

   run the algorithm **Bezier3Dist**$[P_0^{(0)},P_1^{(0)},P_2^{(0)},P_3^{(0)},q_i,\varepsilon \Rightarrow t_i^{(0)},D_i^{(0)}]$;

   get $T^{(0)}=(t_1^{(0)},t_2^{(0)},...,t_N^{(0)})$;

   2e. compute

   $$E^{(0)}=\sum_{i=1}^N D_i^{(0)}.$$
3. For the values $k=1,2,...$ while $E^{(k-1)}-E^{(k)}\ge\delta$ do:

   3a. run the algorithm **Bezier3GivenKnots**$[\{q_i\}_{i=1}^N,T^{(k-1)} \Rightarrow P_0^{(k)},P_1^{(k)},P_2^{(k)},P_3^{(k)}]$;

   if the algorithms has been failed (if the matrix A is singular) set $P_0^{(k)}=P_0^{(k-1)}$, $P_3^{(k)}=P_3^{(k-1)}$ and run the algorithm

   Bezier3FixEndsGivenKnots$[P_0^{(k)},P_3^{(k)},\{q_i\}_{i=1}^N,T^{(k-1)} \Rightarrow P_1^{(k)},P_2^{(k)}]$;

   3b. get the curve

   $$B^{(k)}(t)=(1-t)^3P_0^{(k)}+3t(1-t)^2P_1^{(k)}+3t^2(1-t)P_2^{(k)}+t^3P_3^{(k)},\quad t\in[0,1];$$

   3c. for the values $i=1,2,...,N$:

   run the algorithm **Bezier3Dist**$[P_0^{(k)},P_1^{(k)},P_2^{(k)},P_3^{(k)}\,q_i,\varepsilon \Rightarrow t_i^{(k)},D_i^{(k)}]$;

get $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, \ldots, t_N^{(k)})$;

3d. compute

$$E^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} D_i^{(k)} .$$

3e. Output $P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)}, B^{(k)}(t), E^{(k)}$.

End

The algorithm **Bezier3MinimSeq** actually leads to a minimizing sequence of quad of control points.

Theorem 2.3.1. *For the quantities* $E^{(k)}$ *computed by the algorithm* Bezier3MinimSeq *the relations* $E^{(k)} \le E^{(k-1)}$, $k = 1,2,\ldots$ *hold.*

In Section 2.4 we present the results of numerical calculations that confirm the practical effectiveness of the proposed approach to solve the data fitting problem with cubic Bezier curves.

THE MAIN RESULTS OF THE THESIS

As a consequence of the research carried out in the thesis, the following principal results in the field of data fitting have been obtained.

- New numerical algorithms to solve data fitting problem by the least squares method with quadratic and cubic Bezier curves have been developed.
- A solution of the parameterization problem, which is based on the requirement of minimality of the distance from a data point to the desired curve has been obtained.
- Numerical algorithms to construct approximating quadratic and cubic Bezier curves with fixed endpoints have been developed.
- Numerical algorithms to construct approximating quadratic and cubic Bezier curves with loose endpoints have been developed.

THE LIST OF PUBLICATIONS OF THE AUTHOR

1. Hakopian Yu.R. and Nouri A. Suleiman. An algorithm for least squares approximation by quadratic Bezier curves.- *Proceedings of State Engineering University of Armenia: modelling, optimization, control*, col.13, v.1, 2010, 136-144.
2. Nouri A. Suleiman. Least squares data fitting with quadratic Bezier curves.- *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences,* No.2, 2013, 42-49.
3. Nouri A. Suleiman. Least squares data fitting with cubic Bezier curves.- *Bulletin of Yerevan State University of Architecture and Construction,* No.6(38), 2013, 107-114.

Р Е З Ю М Е
Нури Ахмад Сулейман

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ АППРОКСИМАЦИИ
ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

Диссертационная работа посвящена разработке вычислительных алгоритмов аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов с использованием квадратичных и кубических кривых Безье.

Метод наименьших квадратов является одним из наиболее эффективных средств решения задач обработки и сглаживания экспериментальных данных. Метод имеет множество применений в компьютерной графике, автоматическом проектировании, распознавании образов и других областях. В качестве аппроксимирующих могут использоваться функции различных классов, например, алгебраические многочлены, показательные, логарифмические и др. функции. В последнее время, наряду с упомянутыми выше “классическими” функциями, большое внимание уделяется использованию параметрических кривых и, в частности, кривых Безье. Напомним их определение. *Квадратичная кривая Безье*, определяемая тремя контрольными точками P_0, P_1 и P_2, задается выражением

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \qquad t \in [0,1].$$

Кубическая кривая Безье, которая определяется уже четырьмя контрольными точками P_0, P_1, P_2 и P_3, задается выражением

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \qquad t \in [0,1].$$

Постановка задачи наименьших квадратов. Пусть имеется некоторый набор данных q_i, $i = 1,2,\ldots,N$. В случае квадратичной кривой требуется найти контрольные точки P_0, P_1 и P_2 так, чтобы минимизировать сумму

$$E(P_0, P_1, P_2; T^d) \equiv \sum_{i=1}^{N} | B(t_i^d) - q_i |^2 .$$

В случае кубической кривой требуется найти контрольные точки P_0, P_1, P_2 и P_3 так, чтобы минимизировать сумму

$$E(P_0, P_1, P_2, P_3; T^d) \equiv \sum_{i=1}^{N} | B(t_i^d) - q_i |^2 .$$

В постановке задач участвуют наборы *узлов* $T^d = (t_1^d, t_2^d, \ldots, t_N^d)$, $0 \le t_i^d \le 1$, где узел t_i^d минимизирует расстояние от точки q_i до требуемой кривой, то есть

$$| B(t_i^d) - q_i | = \min_{0 \le t \le 1} | B(t) - q_i |.$$

Сложность здесь заключается в том, что узлы $T^d = (t_1^d, t_2^d, \ldots, t_N^d)$ также подлежат определению. Это так называемая задача *параметризации*, которая является ключевой и наиболее сложной задачей, трбующей своего решения в процессе аппроксимации.

В настоящей диссертации разработан и теоретически обоснован новый подход к практическому решению поставленных задач аппроксимации и параметризации. Заключается он в построении так называемых *минимизирующих последовательностей* контрольных точек. Суть этого подхода такова. Пусть имеется некоторая последовательность троек $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,\ldots$ (квадратичный случай), либо четверок $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)})$, $k = 0,1,\ldots$ (кубический случай) контрольных точек и соответствую- щая последовательность кривых Безье $B^{(k)}(t)$, $k = 0,1,\ldots$ (квадратичных, либо, соответ-ственно, кубических). Для каждой тройки, либо,

соответственно, четверки контроль-ных точек определяется набор узлов $T^{(k)}=(t_1^{(k)},t_2^{(k)},...,t_N^{(k)})$ таких, что

$$|B^{(k)}(t_i^{(k)})-q_i|=\min_{0\le t\le 1}|B^{(k)}(t)-q_i|, \quad i=1,2,...,N.$$

Затем вычисляются суммы

$$E^{(k)}\equiv\sum_{i=1}^{N}|B^{(k)}(t_i^{(k)})-q_i|^2, \quad k=0,1,...$$

Будем говорить, что тройки, либо, соответственно, четверки контрольных точек образуют *минимизирующую последовательность*, если

$$E^{(k)}\le E^{(k-1)}, \quad k=1,2,...$$

Именно посредством алгоритмов построения минимизирующих последовательностей решена в диссертации задача аппроксимации данных методом наименьших квадратов. Рассмотрены два варианта задачи относительно крайних контрольных точек – с фиксированными и со свободными концами. Численные расчеты подтверждают эффективность предлагаемого подхода.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В результате проведенных в работе исследований получены следующие основные результаты в области теории аппроксимации данных.

- Разработаны новые алгоритмы аппроксимации данных методом наименьших квадратов с помощью квадратичных и кубических кривых Безье.

- Получено решение задачи параметризации, в основе которого лежит требование минимальности расстояния от приближаемой точки до требуемой кривой.

- Разработаны алгоритмы построения аппроксимирующих квадратичных и кубических кривых Безье с фиксированными крайними контрольными точками.

- Разработаны алгоритмы построения аппроксимирующих квадратичных и кубических кривых Безье со свободными крайними контрольными точками.

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Նուրի Աhմադ Սուլեյման

ԲԵԶԻԵՅԻ ԿՈՐԵՐՈՎ ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ

Ատենախոսությունը նվիրված է Բեզիեյի քառակուսային և խորանարդային կորերով փորձարարական տվյալների մոտարկման հաշվողական ալգորիթմների մշակմանը փոքրագույն քառակուսիների մեթոդի կիրառմամբ: Փոքրագույն քառա-կուսիների մեթոդը ամենաարդյունավետ միջոցներից մեկն է փորձարարական տվյալների մշակման և հարթեցման խնդիրների լուծման համար: Մեթոդն ունի բազմապիսի կիրառություններ համակարգչային գրաֆիկայում, ավտոմատ նա-խագծման, պատկերների ճանաչողության և այլ ոլորտներում: Մոտարկողների դերում կարող են օգտագործվել տարբեր դասի ֆունկցիաներ, օրինակ, հանրա-հաշվական բազմանդամներ, աստիճանային, լոգարիթմական և այլ ֆունկցիա-ներ: Վերջին ժամանակներում, ի թիվս վերը թվարկված “դասական” ֆունկ-ցիաների, առավել ուշադրություն է նվիրվում պարամետրական կորերի օգտագործմանը և, մասնավորապես, Բեզիեյի կորերին: Վերիիշենք նրանց սահ-մանումները: *Բեզիեյի քառակուսային կորը*, որը որոշվում է P_0, P_1 և P_2 երեք հենքային կետերով, տրվում է

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2, \qquad t \in [0,1]$$

արտահայտությամբ: *Բեզիեյի խորանարդային կորը*, որը որոշվում է արդեն P_0, P_1, P_2 և P_3 չորս հենքային կետերով, տրվում է

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3, \qquad t \in [0,1]$$

արտահայտությամբ:

Փոքրագույն քառակուսիների խնդրի դրվածքը: Դիցուք ունենք տվյալների հավաքածու՝ q_i, $i = 1,2,...,N$: Քառակուսային կորի դեպքում պահանջվում է գտնել P_0, P_1 և P_2 հենքային կետերը այնպես, որ հետևյալ գումարը լինի փոքրագույնը՝

$$E(P_0, P_1, P_2; T^d) \equiv \sum_{i=1}^{N} | B(t_i^d) - q_i |^2 :$$

Խորանարդային կորի դեպքում պահանջվում է գտնել P_0, P_1, P_2 և P_3 հենքային կետերը այնպես, որ

$$E(P_0, P_1, P_2, P_3; T^d) \equiv \sum_{i=1}^{N} | B(t_i^d) - q_i |^2$$

գումարը լինի հնարավոր փոքրագույնը: Խնդրի դրվածքում մասնակցում են $T^d = (t_1^d, t_2^d, ..., t_N^d)$, $0 \le t_i^d \le 1$ *հանգույցների* հավաքածուները, որտեղ t_i^d հանգույցը մինիմիզացնում է q_i կետից մինչև պահանջվող կորի հեռավորությունը, այսինքն՝

$$| B(t_i^d) - q_i | = \min_{0 \le t \le 1} | B(t) - q_i |:$$

Այստեղ բարդությունն այն է, որ որոշման են ենթակա նաև $T^d = (t_1^d, t_2^d, ..., t_N^d)$ հանգույցները: Սա առավել բարդ և հիմնարար դեր ունեցող այսպես կոչված *պարամետրիզացիայի* խնդիրն է, որը լուծում է պահանջում մոտարկման պրոցեսի հենց ընթացքում:

Ներկա ատենախոսությունում մշակվել և տեսականորեն հիմնավորվել է դրված մոտարկման և պարամետրիզացիայի խնդիրները պրակտիկորեն լուծելու նոր մոտեցում: Այն ենթադրում է այսպես կոչված հենքային կետերի *մինիմի-զացնող հաջորդականությունների* կառուցում: Մոտեցման էությունը հետևյալն է:

Դիցուք ունենք հենքային կետերի $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)})$, $k = 0,1,...$ եռյակների (քառա-կուսային դեպք), կամ քառյակների $(P_0^{(k)}, P_1^{(k)}, P_2^{(k)}, P_3^{(k)})$, $k = 0,1,...$ (խորանարդային դեպք) հաջորդականություն և Բեզիեյի կորերի համապատասխան հաջորդա-կանություն՝ $B^{(k)}(t)$, $k = 0,1,...$ (քառակուսային կամ խորանարդային համապա-տասխանաբար): Ամեն հենքային կետերի եռյակի կամ համապատասխանաբար՝ քառյակի համար սահմանվում է $T^{(k)} = (t_1^{(k)}, t_2^{(k)}, ..., t_N^{(k)})$ այնպիսի հանգույցների հավաքածու, որ

$$|B^{(k)}(t_i^{(k)}) - q_i| = \min_{0 \le t \le 1} |B^{(k)}(t) - q_i|, \quad i = 1,2,...,N:$$

Այնուհետև հաշվվում են հետևյալ գումարները՝

$$E^{(k)} \equiv \sum_{i=1}^{N} |B^{(k)}(t_i^{(k)}) - q_i|^2, \quad k = 0,1,...:$$

Կասենք, որ հենքային կետերի եռյակները կամ համապատասխանաբար՝ քառյակները կազմում են *մինիմիզացնող հաջորդականություն*, եթե

$$E^{(k)} \le E^{(k-1)}, \quad k = 1,2,...:$$

Հենց մինիմիզացնող հաջորդականություններ կառուցող ալգորիթմների միջոցով է լուծվում փոքրագույն քառակուսիների եղանակով տվյալների մոտարկման խնդիրը ատենախոսության մեջ: Դիտարկված են խնդրի երկու տարբերակներ՝ եզրային հենքային կետերի ֆիքսած և ազատ դեպքերին համապատասխան: Թվային հաշվարկները հաստատում են առաջարկած մոտեցման արդյունա-վետությունը:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Աշխատանքում կատարված հետազոտությունների արդյունքում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքներ տվյալների մոտարկման բնագավառում:

- Մշակվել են Բեզիեյի քառակուսային և խորանարդային կորերի միջոցով տվյալների մոտարկման նոր հաշվողական ալգորիթմներ փոքրագույն քառակու-սիների մեթոդի կիրառմամբ:
- Ստացվել է պարամետրիզացիայի խնդրի լուծումը, որի հիմքում ընկած է կետից մինչև պահանջվող կորը եղած հեռավորության փոքրագույնը լինելու պահանջը:
- Մշակվել են Բեզիեյի քառակուսային և խորանարդային մոտարկող կորերի կառուցման ալգորիթմներ ֆիքսած եզրային հենքային կետերի դեպքում:
- Մշակվել են Բեզիեյի քառակուսային և խորանարդային մոտարկող կորերի կառուցման ալգորիթմներ ազատ եզրային հենքային կետերի դեպքում: