

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Արաքյան Աշոտ Գասպարի

<<ԲԱՐԴ ՈՐՈՇԵԼԻ>> ԲԱՆԱԶԵՎԵՐԻ ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ
ԱՍՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀԱՇՎԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Ա.01.09 <<Մաթեմատիկական կիրառական և մաթեմատիկական
տրամաբանություն>> մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՍԱԳԻՐ

Երևան 2012

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Абаджян Ашот Гаспарович

СЛОЖНОСТИ ВЫВОДОВ “ТРУДНООПРЕДЕЛЯЕМЫХ” ФОРМУЛ В СИСТЕМАХ
ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.09 – “Математическая кибернетика и математическая
логика”

Ереван 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Ա. Ա. Չուբարյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Բ. Մարանջյան

ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Հ. Ռ. Բոլիբեկյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և
ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կկայանա 2012թ. հունիսի 8-ին ժամը 16⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 <<Մաթեմատիկական կիրառական և մաթեմատիկական տրամաբանություն>> մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ Երևանի պետական համալսարանի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2012թ. մայիսի 7-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար՝

ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու

Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель: доктор физ. мат. наук А. А. Чубарян

Официальные оппоненты: доктор физ. мат. наук Г. Б. Маранджян

кандидат физ. мат. наук О. Р. Болибекян

Ведущая организация: Институт проблем информатики и
автоматизации НАН РА

Защита состоится 8-го июня 2012г. в 16⁰⁰ часов на заседании специализированного совета 044 “Математическая кибернетика и математическая логика” ВАК, при ЕГУ по адресу: 0025, г. Ереван, ул. Алека Манукяна 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 7-го мая 2012г.

Ученый секретарь специализированного совета

кандидат физ. мат. наук

В. Ж. Думанян

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը

Ատենախոսությունում հետազոտված են որոշ դասերի բանաձևերի արտածումների բարդության բնութագրիչները դասական ասույթային հաշվի մի շարք համակարգերում:

Ի լրումն նախկինում հայտնի <<բարդ որոշելի>> բանաձևերի գաղափարին՝ սույն աշխատանքում ներմուծվել է <<քվադի բարդ որոշելի>> բանաձևի գաղափարը: Բարդ որոշելի և քվադի բարդ որոշելի մի շարք բանաձևերի դասերի համար հետազոտվել են արտածումների քայլերի քանակները և երկարությունները դասական ասույթային հաշվի կոնյունկտիվ նորմալ ձևերի կամ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի վրա հիմնված մի քանի հայտնի համակարգերում՝ տրոհման ծառերում (ST), ռեզոլյուցիայի համակարգում (R), գծային ռեզոլյուցիայի համակարգում ($R(lin)$), Գալիերի կոդմից ներմուծված $GCNF'$ համակարգում և Նորիկո Արայիի կոդմից ներմուծված $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգում, որոնցից վերջին երեքը քիչ են ուսումնասիրված:

Բարդ որոշելի և քվադի բարդ որոշելի բանաձևերի սահմանումը հիմնված է որոշիչ կոնյունկտի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարների վրա, ինչը թույլ է տալիս ուսումնասիրված դասերի բանաձևերի համար վերոհիշյալ համակարգերում համեմատաբար դյուրին եղանակով ստանալ արտածումների բարդության բնութագրիչների ստորին գնահատականները, և հիմնական ուշադրությունը դարձվել է նույն կարգի վերին գնահատականներ ստանալու խնդիրներին:

Մինևույն դասի բանաձևերի արտածման բարդությունների գնահատումը տարբեր համակարգերում թույլ է տալիս համեմատել այդ համակարգերի <<արդյունավետությունը>> և, մասնավորապես, ատենախոսությունում ապացուցվել է, որ $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգն էապես ավելի թույլ է Ֆրեգեի համակարգերից (Նորիկո Արայիի հոդվածում այդ համեմատումը նշված

է որպէս **բաց խնդիր**), ինչպէս նաև նշվել է, որ կան որոշ թերություններ $R(lin)$ համակարգի սահմանման և կիրառման հարցերում:

Ատենախոսությունում ներմուծվել են նաև ցանկացած բուլյան բանաձևի համար որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի, ինչպէս նաև նրա տարատեսակների (մինիմալ, կրճատված, փակուղային, կարճագույն) գաղափարները: Ուսումնասիրվել են նրանց կառուցվածքային և մետրիկական հատկությունները, նշվել են նաև հայտնի դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի հատկությունների նմանությունները և էական տարբերությունները, ինչպէս նաև հետազոտվել է կապը նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների մետրիկական չափանիշերի և որոշ համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատականների միջև:

Աշխատանքի արդիականությունը: Տարբեր տրամաբանական և տրամաբանամաթեմատիկական համակարգերում արտածումների բարդության բնութագրիչների հետազոտությունները հատկապէս արդիական են ապացույցների ավտոմատացման մշակումների հետ կապված խնդիրներում, որոնք հանդիսանում են արհեստական բանականության ստեղծման հիմքերը, ինչպէս նաև մեծ կիրառություններ են ստացել գաղտնագրաբանության ոլորտի հետազոտություններում:

Ասույթային հաշվի արտածման բարդության սկզբնակետերից մեկը Կուլի և Ռեքաուի հոդվածն է¹, որտեղ նրանք ֆորմալիզացրեցին արտածման համակարգերը որպէս բազմանդամային ժամանակում հաշվարկվող ֆունկցիաներ, որոնք որպէս արժեքների բազմություն տալիս են ասույթային հաշվի բոլոր նույնաբանությունները: Այդ հոդվածում Կուլը և Ռեքաուն նկատեցին արտածումների երկարությունների և հաշվարկելիության բարդության դասերի տարանջատման միջև ֆունդամենտալ կապ. նրանք ցույց տվեցին, որ գոյություն ունի ասույթային հաշվի արտածման համակարգ, որում բոլոր

¹ Cook S. A. and Reckhow A. R., “The relative efficiency of propositional proof systems” J. Symbolic Logic, 44, (1979), 36-50.

նույնաբանություններն արտածվում են բազմանդամային ժամանակում (բազմանդամորեն սահմանափակված համակարգ, որը կոչվում է սուպեր համակարգ) այն և միայն այն դեպքում, երբ NP դասը փակ է լրացման նկատմամբ: Այդ դիտակետից ստացվում է այսպես կոչված *Կուկ-Ռեքսու ծրագիրը*, որը հանդիսանում է ասույթային հաշվի արտածման բարդության բնութագրիչների հետազոտման հիմնական շարժառիթներից մեկը. NP -ն $coNP$ -ից տարանջատելիու համար (և, հետևաբար, P -ն NP -ից) բավական է ստանալ արտածումների երկարությունների սուպեր-բազմանդամային ստորին գնահատականներ ասույթային հաշվի բոլոր արտածման համակարգերում:

Ատենախոսության նպատակներն են

- Հետազոտել քվադի բարդ որոշելի բանաձևերի արտածումների բարդությունները ST , R , $R(lin)$ և $GCNF^+$ -տեղափոխություն համակարգերում:
- Հետազոտել բարդ որոշելի բանաձևերի արտածումների բարդությունները $R(lin)$ -ն $GCNF^+$ -տեղափոխություն համակարգերում:
- Համեմատել դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների կառուցվածքային և մետրիկական հատկությունները և հետազոտել կապը նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների մետրիկական չափանիշերի և որոշ համակարգերում արտածումների բարդությունների գնահատականների միջև:

Հետազոտման մեթոդները

Ատենախոսությունում օգտագործվել են՝

- Արտածումների բարդության բնութագրիչների գնահատման տարբեր մեթոդներ,
- Երկու տարբեր արտածման համակարգերի համեմատման հայտնի մեթոդներ,

- Դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի մետրիկական չափանիշերի գնահատման մեթոդներ:

Գիտական նորությունը

- Աստվոյային հաշվի որոշ համակարգերում ստացվել են քվադի բարդ որոշելի բանաձևերի մի դասի արտաձման քայլերի քանակի և երկարության գնահատականներ, որոնք հիմնավորում են այդ համակարգերի տարբեր արդյունավետությունը:
- Ֆրեգեի համակարգերում բազմանդամային բարդությամբ արտաձվող բարդ որոշելի բանաձևերի մի դասի համար ստացվել են արտաձման երկարության ստորին ցուցային գնահատականներ $R(lin)$ և $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգերում, ինչպես նաև հիմնավորվել է, որ վերջին համակարգի ցանկացած արտաձում առավելագույնը բազմանդամային աճով է մոդելավորվում Ֆրեգեի համակարգերում, ինչով և ճշգրտվել է $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգի տեղը աստվոյային հաշվի համակարգերի բաղդատման աղյուսակում:
- Հետագոտվել են որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների կառուցվածքային և մետրիկական հատկությունները, ինչպես նաև նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների մետրիկական չափանիշերի և որոշ համակարգերում արտաձման բարդությունների գնահատականների միջև կապը:

Պաշտպանությանը ներկայացված հիմնական արդյունքները

- Քվադի բարդ որոշելի բանաձևերի մի դասի ($Tsgf_n$) համար ստացված արտաձումների բարդությունների վերին և ստորին միևնույն կարգի բազմանդամային գնահատականները ST և R համակարգերում և լոգարիթմական գնահատականները $R(lin)$ և $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգերում:

- Բարդ որոշելի բանաձևերի մի դասի ($TTM_{n,2^n-1}$) համար ստացված արտածման երկարության ստորին ցուցչային գնահատականները $R(lin)$ և $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգերում և վերջինիս բազմանդամային հանգեցումը Ֆրեզեի համակարգերին, որոնցում նշված բանաձևերն ունեն արտածման բարդության բազմանդամային գնահատական, և, հետևաբար, **Ֆրեզեի համակարգերի ցուցչային արագացման փաստը $GCNF'$ տեղափոխություն համակարգի նկատմամբ** (վերջին փաստը մասնագիտական գրականությունում նշված է որպես բաց խնդիր):
- Որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի կառուցվածքային և մետրիկական որոշ հատկությունները, ինչպես նաև նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների մետրիկական չափանիշերի և որոշ համակարգերում արտածման բարդությունների գնահատականների միջև կապը:

Արդյունքների հիմնավորությունը և ստույգությունը: Բոլոր արդյունքները ձևակերպված են թեորեմների տեսքով, և թեորեմներն ապացուցված են:

Գիրառական նշանակությունը: Դիտարկված բոլոր համակարգերը (բացառությամբ Ֆրեզեի համակարգերի) համարվում են <<թույլ>> համակարգեր, քանի որ դրանցից յուրաքանչյուրում բանաձևերի առանձին դասերի համար ստացվել են արտածման բարդության ստորին ցուցչային գնահատականներ, սակայն յուրաքանչյուրում արտածման որոնման <<հեշտ>> մարտավարությունը դարձրել է դրանք հիմքային տրամաբանական դատողությունների ավտոմատացման ոլորտում, հետևաբար նաև արհեստական բանականության կառուցման և գաղտնագրաբանության ուղղությամբ տարվող հետազոտություններում: Այս ամենը փաստում է, որ յուրաքանչյուր բանաձևի որոշակի հայտանիշերից կախված նրա արտածման բարդության գնահատումը

կարող է էական դեր խաղալ նրա արտաձման որոնման (կամ այդպիսի գործողության անիմաստության) հարցում:

Աշխատանքի ապրոքացիան

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները գեկուցվել են՝

- 2009թ.-ին Սոֆիայում կայացած ամառային համաեվրոպական տրամաբանական կոնֆերանսում (ESM “Logic Colloquium”-2009),
- 2010թ.-ին Փարիզում կայացած ամառային համաեվրոպական տրամաբանական կոնֆերանսում (ESM “Logic Colloquium”-2010),
- 2011թ.-ին Բարսելոնայում կայացած ամառային համաեվրոպական տրամաբանական կոնֆերանսում (ESM “Logic Colloquium”-2011),
- Հաշվողական գիտությունների և ինֆորմացիոն տեխնոլոգիաների միջազգային կոնֆերանսում CSIT-2011 (Երևան, Հայաստան),
- ԵՊՀ-ի ԻԿՄ ֆակուլտետի գիտական սեմինարում, 2012թ.-ին:

Հրապարակումները: Ատենախոսության թեմայով հրապարակվել է 6 գիտական աշխատություն, որոնց ցանկը բերված է սեղմագրի վերջում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը: Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, ամփոփիչ եզրակացությունից և մեջբերված գրականության ցանկից: Աշխատանքը շարադրված է 84 էջերում, իսկ գրականության ցանկը պարունակում է 26 անվանում:

Աշխատանքի համառոտ բովանդակությունը

Ատենախոսությունը կազմված է ներածությունից և երեք գլուխներից:

Ներածությունում շարադրված են հետազոտությունների այն հիմնական արդյունքները, որոնք խթանել են սույն աշխատության ուսումնասիրության առարկան, ինչպես նաև բերվում են որոշ հիմնական սահմանումներ:

Կօգտագործենք բուլյան խորանարդի (E^n), տրամաբանական բանաձևի, նույնաբանության, Դասական Աստվթային Տրամաբանության համար արտածման համակարգի, արտածման բարդության գաղափարները և Կուկի ու Ռեքաուի կողմից սահմանված արտածման համակարգերի բազմանդամային հանգեցումները:

Դիտարկվող համակարգերից յուրաքանչյուրի լեզուն տրվում է սահմանման ժամանակ:

Փ դիտարկվող համակարգերից յուրաքանչյուրը պարունակում է վերջավոր քանակով հենասույթներ (կամ նախապես ֆիքսված, կամ դիտարկվող բանաձևի հիման վրա կառուցված) և վերջավոր քանակով սխեմատիկորեն տրվող արտածման կանոններ: Փ համակարգում արտածումը (Φ -արտածում) սահմանվում է որպես բանաձևերի վերջավոր հաջորդականություն, որոնցից յուրաքանչյուրը կամ հենասույթ է, կամ ստացվում է նախորդ բանաձևերից արտածման կանոնների միջոցով: Արտածումները կարող են դիտարկվել նաև ծառի տեսքով: Ատենախոսության մեջ դիտարկված համակարգերի մեծ մասը <<հերքող>> է, այսինքն՝ դրանցից յուրաքանչյուրում նույնաբանության ժխտումից արտածվում է հակասություն, ուստի մենք կնույնացնենք հերքում և արտածում գաղափարները:

Արտածման բարդության տեսության մեջ արտածման երկու հիմնական բնութագրիչներն են՝ t –բարդությունը, որն արտածման քայլերի քանակն է և l –բարդությունը, որն արտածման մեջ բոլոր սիմվոլների քանակն է: Դիցուք, Φ -ն արտածման համակարգ է, իսկ φ -ն՝ նույնաբանություն (կամ հակասություն): Նշանակենք t_φ^Φ -ով (l_φ^Φ -ով) Φ -ում φ նույնաբանության արտածումների համար t –բարդություններից (l –բարդություններից) մինիմալը:

Դիցուք, Φ_1 -ն ու Φ_2 -ը երկու տարբեր արտածման համակարգեր են: Հետևելով Կուկին և Ռեքաուին՝ հիշեցնենք բազմանդամային հանգեցման գաղափարը:

Մտահանում 1. Φ_1 -ը $p-t$ -հանգեցվում է ($p-l$ -հանգեցվում է) Φ_2 -ին, եթե գոյություն ունի $p()$ բազմանդամ այնպիսին, որ և Φ_1 -ում, և Φ_2 -ում արտաձելի յուրաքանչյուր φ բանաձևի համար $t_{\varphi}^{\Phi_2} \leq p(t_{\varphi}^{\Phi_1})$ ($I_{\varphi}^{\Phi_2} \leq p(I_{\varphi}^{\Phi_1})$):

Մտահանում 2. Φ_1 և Φ_2 համակարգերը $p-t$ -համարժեք են ($p-l$ -համարժեք են), եթե Φ_1 -ը $p-t$ -հանգեցվում է ($p-l$ -հանգեցվում է) Φ_2 -ին և Φ_2 -ը $p-t$ -հանգեցվում է ($p-l$ -հանգեցվում է) Φ_1 -ին:

Մտահանում 3. Φ_2 -ն ունի ցուցչային t -արագացում (l -արագացում) Φ_1 -ի նկատմամբ, եթե Φ_1 -ը $p-t$ -հանգեցվում է ($p-l$ -հանգեցվում է) Φ_2 -ին և գոյություն ունի և Φ_1 -ում, և Φ_2 -ում արտաձելի φ_n բանաձևերի այնպիսի հաջորդականություն, որ $t_{\varphi_n}^{\Phi_1} > 2^{\theta(\frac{\Phi_2}{\varphi_n})}$ ($I_{\varphi_n}^{\Phi_1} > 2^{\theta(\frac{\Phi_2}{\varphi_n})}$):

Այս աշխատանքում ցանկացած տրամաբանական բանաձևի համար ներմուծել ենք որոշիչ կոնյունկտի, մինիմալ որոշիչ կոնյունկտի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևի գաղափարները: Միննույն բանաձևի համար համեմատել ենք դիզյունկտիվ նորմալ ձևն ու որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևը և ցույց ենք տվել, որ դրանք կարող են ունենալ էական տարբերություններ:

Առաջին գլխում, որը բաղկացած է երեք պարագրաֆից, տրվել է բարդ և քվադի բարդ որոշելի բանաձևերի գաղափարը և հետազոտվել են քվադի բարդ որոշելի բանաձևերի մի դասի արտաձման բարդության բնութագրիչները մի քանի համակարգերում:

Առաջին պարագրաֆում տրվել են հիմնական գաղափարները և նկարագրվել է **Ցեյտիյան բանաձևերի** քվադի բարդ որոշելի մի ենթադաս ($Tsgf_n$):

$|\varphi|$ -ով նշանակենք φ բանաձևի երկարությունը, որը նրա մեջ մտնող բոլոր տրամաբանական նշանների քանակն է: Ակնհայտ է, որ բանաձևի ամբողջ երկարությունը, որը բոլոր սիմվոլների կամ բոլոր փոփոխականների մուտքերի քանակն է, սահմանափակ է որոշակի գծային ֆունկցիայով՝ կախված $|\varphi|$ -ից:

Նույնաբանությունը կոչվում է *միներմալ*, եթե այն հնարավոր չէ ստանալ ավելի կարճ նույնաբանության տեղադրումով:

φ տրամաբանական բանաձևի համար *տեղադրման կանոն* կանվանենք հետևյալ նույնություններից յուրաքանչյուրը՝

$$0 \& \varphi = 0, \varphi \& 0 = 0, 1 \& \varphi = \varphi, \varphi \& 1 = \varphi, \varphi \& \varphi = \varphi, \varphi \& \bar{\varphi} = 0, \bar{\varphi} \& \varphi = 0,$$

$$0 \vee \varphi = \varphi, \varphi \vee 0 = \varphi, 1 \vee \varphi = 1, \varphi \vee 1 = 1, \varphi \vee \varphi = \varphi, \varphi \vee \bar{\varphi} = 1, \bar{\varphi} \vee \varphi = 1,$$

$$0 \supset \varphi = 1, \varphi \supset 0 = \varphi, 1 \supset \varphi = \varphi, \varphi \supset 1 = 1, \varphi \supset \varphi = 1, \varphi \supset \bar{\varphi} = \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \supset \varphi = \varphi,$$

$$\bar{0} = 1, \bar{1} = 0, \bar{\bar{\varphi}} = \varphi:$$

Կիրառել տեղադրման կանոն նշանակում է բանաձևի մեջ վերոհիշյալ նույնությունների ձախ մասի տեսքն ունեցող ենթաբանաձևերի փոխարեն տեղադրել աջ մասը:

Հետևելով գործածական տերմինաբանությանը՝ փոփոխականներին և նրանց ժխտումներին կանվանենք լիտերալներ: Կոնյունկտը կարող է ներկայացվել լիտերալների բազմությամբ (կոնյունկտը միևնույն ժամանակ չի կարող պարունակել որևէ փոփոխական և նրա ժխտումը):

Դիցուք, φ -ն տրամաբանական բանաձև է, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ -ը φ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունն է, իսկ $X' = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\}$ -ը ($1 \leq m \leq n$) X -ի որևէ ենթաբազմություն է:

Մահմաճում 4. Տրված $\sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} \in E^m$ համար $K^\sigma = \{x_{i_1}^{\sigma_1}, x_{i_2}^{\sigma_2}, \dots, x_{i_m}^{\sigma_m}\}$ կոնյունկտը կանվանենք φ -որոշիչ, եթե վերագրելով σ_j ($1 \leq j \leq m$) արժեքը յուրաքանչյուր x_{i_j} -ին և հաջորդաբար կիրառելով տեղադրման կանոնները, ստանանք φ -ի արժեքը (0 կամ 1)՝ անկախ մնացած փոփոխականների արժեքներից:

Մահմաճում 5. φ բանաձևի որոշիչ կոնյունկտներում փոփոխականների միմյանմասի կանվանելը φ -որոշիչի երկարություն և կնշանակենք $d(\varphi)$ -ով:

Ակնհայտ է, որ ցանկացած φ բանաձևի համար $d(\varphi) < |\varphi|$, և ինչքան փոքր է այս մեծությունների տարբերությունը, այնքան ավելի <<բարդ>> է համարվում բանաձևը:

Մահմանում 6. φ նույնաբանության համար $D = K_1 \vee \dots \vee K_m$ դիզյունկտիվ նորմալ ձևը կանվանենք φ -որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձև, եթե D -ում կամայական տարրական կոնյունկտ φ -որոշիչ է և $D = \varphi$:

Մահմանում 7. Դիցուք, φ_n -ը ($n \geq 1$) մինիմալ նույնաբանությունների հաջորդականություն է: Եթե որևէ n_0 -ի համար, $\forall n \geq n_0$, $d(\varphi_n) < d(\varphi_{n+1})$, ապա $\varphi_{n_0}, \varphi_{n_0+1}, \varphi_{n_0+2}, \dots$ բանաձևերը կոչվում են քվադի բարդ որոշելի:

Մահմանում 8. Դիցուք, φ_n -ը ($n \geq 1$) մինիմալ նույնաբանությունների հաջորդականություն է: Եթե որևէ n_0 -ի համար գոյություն ունի c հաստատուն այնպիսին, որ $\forall n \geq n_0$, $(d(\varphi_n))^c \leq |\varphi_n| < (d(\varphi_n))^{c+1}$, ապա $\varphi_{n_0}, \varphi_{n_0+1}, \varphi_{n_0+2}, \dots$ բանաձևերը կոչվում են բարդ որոշելի:

Հայտնի <<Աղավինների-վանդակների>> սկզբունքը ներկայացնող

$$PHP_n = \big\&\bigvee_{i=1}^{n+1} x_{ij} \supset \bigvee_{1 \leq i < k \leq n+1} \bigvee_{1 \leq j \leq n} (x_{ij} \& x_{kj}) \quad (n \geq 1)$$

նույնաբանությունների համար որոշիչ կոնյունկտ է, մասնավորապես, $\{x_{11}, x_{21}\}$, հետևաբար $d(PHP_n) = 2$ $n \geq 1$ դեպքում, ուստի PHP_n -ը ոչ քվադի բարդ որոշելի է, ոչ բարդ որոշելի:

Մատրիցի շրջումը ներկայացնող

$$TTM_{n,m} = \bigvee_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in E^n} \big\&\bigvee_{j=1}^m \bigvee_{i=1}^n x_{ij}^{\sigma_i} \quad (n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n - 1)$$

նույնաբանությունների կառուցվածքից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $TTM_{n,m}$ -որոշիչ կոնյունկտ պարունակում է առնվազն m լիտերալներ: Դիցուք, $\psi_n = TTM_{n, 2^n - 1}$, $n \geq 1$, ապա $\psi_3, \psi_4, \psi_5, \dots$ բանաձևերը բարդ որոշելի են:

Նշանակենք $Tsgf_n$ -ով ($n \geq 2$) Ցեյտինի բանաձևերը, որոնք կառուցվում են n գազաթ ունեցող լրիվ գրաֆի հիման վրա, և գազաթներից միայն մեկին է վերագրված 1: Կամայական $Tsgf_n$ հերքելի է, հետևաբար ունի հերքում R , $R(lin)$ և $GCNF^+$ +տեղափոխություն համակարգերում, իսկ $\neg Tsgf_n$ -ը նույնաբանություն է և ունի արտաձում ST համակարգում: Ատենախոսությունում ցույց է տրված, որ $Tsgf_n$ բանաձևերը քվադի բարդ որոշելի են:

Երկրորդ պարագրաֆում նկարագրվել են արտաձման այն համակարգերը, որոնցում հետազոտվել են նկարագրված դասերի բանաձևերի արտաձումների բարդության բնութագրիչները:

Այդ համակարգերն են՝

- Տրոհման ծառ (ST) (սահմանումը տես²)
- Ռեզոլյուցիայի համակարգ (R)
- Գծային ռեզոլյուցիայի համակարգ ($R(lin)$) (սահմանումները տես³)
- Առանց հատույթի կանոնի Գալիերի համակարգ ($GCNF^+$)
- $GCNF^+$ +տեղափոխություն համակարգ (սահմանումները տես⁴)
- Ֆրեգեի համակարգեր ($\mathcal{F}$) (սահմանումը տես⁵)

Տրվում են նաև այս համակարգերի արդյունավետությունների հայտնի հարաբերությունները:

Երրորդ պարագրաֆում հետազոտված են $Tsgf_n$ բանաձևերի արտաձման բարդությունները ST , R , $R(lin)$ և $GCNF^+$ +տեղափոխություն համակարգերում:

² Данцин Е. Я., “Две системы доказательства тавтологичности, основанные на методе расщеплений”, Записки научных семинаров ЛОМИ, 1981, 105, 24–44.

³ Ran Raz, Iddo Tzameret, “Resolution over linear equations and multilinear proofs”, Ann. Pure Appl. Logic 155(3), pp. 194–224, 2008.

⁴ N. H. Arai, “Tractability of Cut-free Gentzen-type propositional calculus with permutation inference”, Theoretical Computer Science 170, pp. 129–144, 1996

⁵ P. Pudlak, “Lengths of proofs” Handbook of proof theory, North-Holland, pp. 547–637, 1998

Ստացված արդյունքներն են.

Թեորեմ 1.3.1.⁶

1. $2^{n-1} \leq t_{Tsgf_n}^R \leq p_1(2^n)$ որոշակի $p_1()$ բազմանդամի համար և
 $n2^{n-1} \leq l_{Tsgf_n}^R \leq p_2(n^3 2^{2n})$ որոշակի $p_2()$ բազմանդամի համար:
2. $t_{Tsgf_n}^{ST} \leq 2^n$ և $l_{Tsgf_n}^{ST} \leq n^3 2^{2n}$:

Թեորեմ 1.3.2.

1. $t_{Tsgf_n}^{R(lin)} \leq l_{Tsgf_n}^{R(lin)} \leq p(\log_2 |Tsgf_n|)$ որոշակի $p()$ բազմանդամի համար:
2. $t_{Tsgf_n}^{GCNF'+permutation} \leq p(\log_2 |Tsgf_n|)$ որոշակի $p()$ բազմանդամի համար և
 $l_{Tsgf_n}^{GCNF'+permutation} = O(|Tsgf_n|)$:

Երկրորդ գլխում, որը բաղկացած է երկու պարագրաֆից, հետազոտվել են բարդ որոշելի բանաձևերի ψ_n դասի արտաձման բարդությունները $R(lin)$ և $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգերում, ինչպես նաև վերջինիս համեմատումը $\mathcal{F}$ համակարգերի հետ:

Առաջին պարագրաֆում հետազոտվել են ψ_n բանաձևերի արտաձման բարդության բնութագրիչները $R(lin)$ համակարգում, և ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 2.1.2.
$$t_{-\psi_n}^{R(l)} = \Omega(2^{\sqrt{\frac{|\psi_n|}{n}}}), \quad t_{-\psi_n}^{R(lin)} = O(2^{\sqrt{n|\psi_n|}}), \quad l_{-\psi_n}^{R(lin)} = \Omega(2^{\sqrt{\frac{|\psi_n|}{n}}}),$$

$$l_{-\psi_n}^{R(lin)} = 2^{O(\sqrt{n|\psi_n|})}.$$

Այս պարագրաֆում նշվել են նաև $R(lin)$ համակարգի սահմանման որոշ թերություններ:

Երկրորդ պարագրաֆում հետազոտվել են ψ_n բանաձևերի արտաձման բարդության բնութագրիչները $GCNF'$ +տեղափոխություն համակարգում, ինչպես

⁶ Թեորեմների համարակալումը համապատասխանում է ատենախոսությունում համարակալմանը:

նաև ցույց է տրվել, որ $GCNF^+$ -տեղափոխություն համակարգը $p-l$ – հանգեցվում է $\mathcal{F}$ համակարգերին: Ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները՝

Թեորեմ 2.2.1. $I_{\neg\psi_n}^{GCNF^+ + permutation} = \Omega\left(2^{\sqrt{|\psi_n|} \frac{\log_2 n}{\sqrt{n}}}\right):$

Թեորեմ 2.2.2. Ֆրեգեի ցանկացած համակարգ ունի ցուցչային l – արագացում $GCNF^+$ -տեղափոխություն համակարգի նկատմամբ:

Երրորդ գլխում, որը բաղկացած է չորս պարագրաֆից, ուսումնասիրվել են որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների կառուցվածքային և մետրիկական հատկությունները, և հետագոտվել է կապը նույնաբանությունների որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների մետրիկական չափանիշերի և որոշ համակարգերում արտածման բարդությունների գնահատականների միջև:

Առաջին պարագրաֆում տրվել են բուլյան բանաձևերի որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների սահմանումները:

Երկրորդ պարագրաֆում հետագոտվել են որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների կառուցվածքային հատկությունները, նշվել են դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի կառուցվածքային հիմնական տարբերությունները:

Երրորդ պարագրաֆում տրվել են որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի տարատեսակների որոշ մետրիկական չափանիշերի գնահատականները:

Չորրորդ պարագրաֆում տրվում են արտածման բարդության բնութագրիչների և որոշիչ դիզյունկտիվ նորմալ ձևերի մետրիկական հայտանիշերի հարաբերությունները:

Ատենախոսության թեմատիկայով հրապարակված աշխատությունների ցուցակ

1. A. Abajyan, A. Chubaryan, Proof Complexity of Hard-determinative Formulas in $R(\text{lin})$, ASL, ESM, LC-2009, Sofia, Abstracts, p. 27.
2. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A. Abajyan, On Numerical Properties of Determinative Disjunctive Normal Forms for Tautologies, ASL, ESM, LC-2010, Paris, Abstracts of contributed talks, pp. 6-7.
3. A. Abajyan, Polynomial lower bounds to the lengths of proofs in some weak systems, ASL, ESM, LC-2011, Barcelona, Abstracts, pp. 39-40.
4. A. Abajyan, Polynomial length proofs for some class of Tseitin formulas, Proceeding of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences, № 3, pp. 3-8, 2011.
5. An. Chubaryan, Arm. Chubaryan, A. Abajyan, On Determinative Disjunctive Normal Forms, CSIT-2011, Yerevan, pp. 39-41.
6. A. Abajyan, An. Chubaryan, Proof complexities of some propositional formulae classes in different refutation systems, International Journal ITA, Sofia, Vol. 17, № 3, 2010, pp. 289-299.

Резюме

В диссертации исследованы сложностные характеристики выводов некоторых классов “трудноопределяемых” и “квази-трудноопределяемых” формул в ряде систем доказательств классического исчисления высказываний.

В работе для любой пропозициональной формулы введены понятия определяющего конъюнкта и определяющей дизъюнктивной нормальной формы.

Определяющей длиной $d(\varphi)$ формулы φ называется минимальное количество переменных, придавая значения которым можно определить значение φ (0 или 1) вне зависимости от значений остальных переменных формулы φ .

Если для последовательности формул φ_n длины φ_n и $d(\varphi_n)$ одинаковы по порядку, то такие формулы называются трудноопределяемыми, если же $d(\varphi_n)$ растет с ростом длины φ_n , то такие формулы – квази-трудноопределяемые.

В диссертации исследованы количество шагов и длины выводов одного класса квази-трудноопределяемых формул ($Tsgf_n$) и некоторого класса трудноопределяемых формул ($TTM_{n,2^n-1}$) в ряде опровергающих систем доказательств (дерева расщеплений (ST), резолюций (R), резолюций над линейными равенствами ($R(lin)$) и системе $GCNF'+permutation$).

Диссертационная работа состоит из введения и трех глав.

Во введении даны краткая характеристика диссертации и обзор результатов, на базе которых проведены исследования диссертации и некоторые общеизвестные определения.

В первой главе даны основные определения трудноопределяемых и квази-трудноопределяемых формул, описан класс $Tsgf_n$ квази-трудноопределяемых формул и исследованы сложности выводов $Tsgf_n$ в системах ST , R , $R(lin)$ и $GCNF'+permutation$.

Во второй главе исследованы сложностные характеристики выводов некоторого класса трудноопределяемых формул $TTM_{n,2^n-1}$ в системах $R(lin)$ и $GCNF'+permutation$.

Полученные результаты позволили уточнить иерархию систем доказательств классического исчисления высказываний.

В третьей главе исследованы структурные и метрические свойства определяющих дизъюнктивных нормальных форм и их разновидностей (совершенных, сокращенных, тупиковых, кратчайших и минимальных), а так же зависимость между метрическими характеристиками разновидностей определяющих дизъюнктивных нормальных форм различных тавтологий и их выводами в некоторых систем доказательств.

Основными результатами диссертации являются:

1. Одинаковые по порядку нижние и верхние полиномиальные оценки сложностей выводов квази-трудноопределяемых формул $Tsgf_n$ в системах ST и R , а также оценки логарифмического порядка для сложностей выводов в системах $R(lin)$ и $GCNF'+permutation$, что подчеркивает существенную эффективность двух последних систем по сравнению с ST и R .
2. Получение низких экспоненциальных оценок длины выводов трудноопределяемых формул $TTM_{n,2^n-1}$ в системах $R(lin)$ и $GCNF'+permutation$, а также доказательство полиномиальной сводимости последней системы к системам Фреге, в которых формулы $TTM_{n,2^n-1}$ имеют полиномиально ограниченные выводы. Последний факт доказывает экспоненциальное ускорение систем Фреге над системой $GCNF'+permutation$ (в литературе по сложности выводов это отношение считалось открытой задачей).
3. Некоторые структурные и метрические характеристики разновидностей определяющих дизъюнктивных нормальных форм для произвольных пропозициональных формул. А так же зависимость между метрическими характеристиками разновидностей определяющих дизъюнктивных нормальных форм различных тавтологий и их выводами в некоторых систем доказательств.

Abstract

In this thesis the proof complexity characteristics of some classes of hard determinable and quasi-hard determinable formulas are investigated in different proof systems of Classical Propositional Logic.

For every propositional formula the notions of determinative conjunct and determinative disjunctive normal form are introduced.

The determinative length $d(\varphi)$ of formula φ is denoted as the minimal number of variables, some values of which can produce the value of φ (0 or 1) independently of the values of the remaining variables in φ .

The formulas φ_n are called hard determinable if the length of φ_n and $d(\varphi_n)$ are equal by order. The formulas φ_n are called quasi-hard determinable if $d(\varphi_n)$ increase with the increase of the length of φ_n .

In this thesis the number of steps and sizes of proofs are investigated for some class of quasi-hard determinable formulas ($Tsgf_n$) and some class of hard determinable formulas ($TTM_{n,2^n-1}$) in different refutation proof systems (Split Tree (ST), Resolution (R), Resolution over linear equations ($R(lin)$) and $GCNF'$ +permutation).

The thesis consists of Introduction and three parts.

The main characteristics of the thesis, the known results, on the base of which the results of our investigation are obtained, and some well-known definitions are given in Introduction.

The main definitions of hard determinable and quasi-hard determinable formulas are given in the first part as well as the proof complexities investigations for some class of quasi-hard determinable formulas ($Tsgf_n$) in the systems ST , R , $R(lin)$ and $GCNF'$ +permutation.

The investigations of proof complexities of some class of hard determinable formulas $TTM_{n,2^n-1}$ in the systems $R(lin)$ and $GCNF'+permutation$ are given in the second part.

The hierarchy of proof systems for Classical Propositional Logic defines more precisely on the base of the results of this part.

Some structural and numerical properties of varieties for determinative disjunctive normal forms (perfect, abridged, dead-end, shortest and minimal) for propositional formulas and the correlation between the numerical characteristics of different determinative disjunctive normal forms and proof complexities of these tautologies in some proof systems are investigated in the third part of the thesis.

The main results of the thesis are:

1. The same by order lower and upper polynomial bounds for proof complexities of quasi-hard determinable formulas $Tsgf_n$ in the systems ST and R , as well as the logarithmic by order bounds for proof complexities of the same formulas in the systems $R(lin)$ and $GCNF'+permutation$ (this fact emphasizes the essential efficiencies of the last two systems over the first ones).
2. The exponential lower bounds for the proof sizes of the sequence of hard determinative formulas $TTM_{n,2^n-1}$ in the systems $R(lin)$ and $GCNF'+permutation$, the proving of polynomial simulation of the system $GCNF'+permutation$ with Frege systems, in which formulas $TTM_{n,2^n-1}$ have polynomial bounded proof sizes. From the last result it follows that Frege systems have exponential speed-up over the system $GCNF'+permutation$ (this fact was pointed as open in proof complexity literature).
3. Some structural and numerical characteristics for varieties of disjunctive normal forms for arbitrary propositional formulas and the correlation between the numerical characteristics of different determinative disjunctive normal forms and proof complexities of these tautologies in some proof systems.