

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մալինյան Արգիշտի Ռուսլանի

n -ԱՆԿԱԽ ՀԱՆԳՈՒՅՑՆԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա.01.07 “Հաշվողական մաթեմատիկա” մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2013

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Малинян Аргишти Русланович

О МНОЖЕСТВАХ n -НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.07 “Вычислительная математика”

Ереван – 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Ա. Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Մ. Գ. Գրիգորյան
	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Լ. Ռ. Ռաֆայելյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀԳԱԱ Մաթեմատիկայի ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2013 թ. հունիսի 14-ին, ժ. 14⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044-“Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա” մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2013 թ. մայիսի 10-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր՝

Վ. Ժ. Դումանյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физ.-мат. наук	А. А. Акопян
Официальные опоненты:	доктор физ.-мат. наук	М. Г. Григорян
	кандидат физ.-мат. наук	Л. Р. Рафаелян

Ведущая организация: Институт математики НАН Армении

Защита состоится 14-го июня 2013 г. в 14⁰⁰ часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 044 “Математическая кибернетика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 10-го мая 2013 г.

Ученый секретарь специализированного совета.
доктор физ.-мат. наук

В. Ж. Думанян

Թեմայի արդիականությունը. Թվային մեթոդներում հաճախ անհրաժեշտ է լինում բարդ ֆունկցիաները մոտարկել ավելի պարզերով: Այդ խնդրի լուծման լայն տարածում գտած մեթոդներից է բազմանդամային միջարկումը կամ ինտերպոլացիան: Բազմանդամներով կամ այլ ֆունկցիաներով միջարկումը կիրառական մաթեմատիկայի պատմականորեն համեմատաբար վաղ առաջացած մեթոդներից է: Ներկայումս բազմանդամային միջարկումը մոտարկումների տեսության և հաշվողական մաթեմատիկայի կարևորագույն բաժիններից մեկն է: Այն լայնորեն կիրառվում է բազմաթիվ մաթեմատիկական խնդիրներում: Միաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրի սպառիչ լուծումներ են տվել դեռևս Լագրանժը և Նյուտոնը: Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկումը համեմատաբար նոր բաժին է և սկիզբ է առել 19-րդ դարի երկրորդ կեսերից՝ Վ. Բորչարդի և Լ. Կրոնեկերի աշխատանքներով:

Բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդրով հիմնավորապես սկսել են զբաղվել շատ ավելի ուշ՝ վերջին չորս-հինգ տասնամյակների ընթացքում: Այս շրջանում մաթեմատիկայի շատ այլ բաժիններում ևս հետազոտությունների հիմնական ուղղությունը մի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքից տեղափոխվեց մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դեպք:

Միաչափ շատ կիրառական խնդիրների, ինչպես օրինակ՝ թվային ինտեգրման, ոչ գծային հավասարումների համակարգերի և դիֆերենցիալ հավասարումների մոտավոր լուծման մեջ կարևոր դեր է կատարում բազմանդամային միջարկումը: Մի քանի փոփոխականի համապատասխան խնդիրներում սկզբնապես կիրառվել է միաչափ միջարկումների թեճկորակյալ արտադրյալով ընդհանրացումը, որը, չնայած պարզությամբ, ունի մի էական թերություն: Այն է՝ թեճկորակյալ արտադրյալի բազմանդամային տարածությունը և ցանցը ինվարիանտ չեն գծային ձևափոխությունների նկատմամբ: Այս հանգամանքն անհրաժեշտ է դարձնում նշված խնդիրներում ըստ էության մի քանի փոփոխականի միջարկման կիրառությունը:

Նշանակենք Π_n -ով երկու փոփոխականի բոլոր $\leq n$ աստիճանի բազմանդամների տարածությունը: Մենք ուսումնասիրում ենք n -անկախ բազմությունները R^2 -ում և R^d -ում երրորդ և չորրորդ աստիճանի հանրահաշվական կորերի՝ համապատասխանաբար կուբիկների և քվարտիկների վրա: R^2 -ում և R^d -ում n -անկախ X բազմությունները բնութագրվում են այն փաստով, որ $P_{n,X} := \{p \in \Pi_n, p|_X = 0\}$ տարածության չափողականությունը հավասար է $\dim \Pi_n - \#X$: Այնուհետև, n աստիճանի բազմանդամային միջարկումը լուծելի է միայն այդպիսի բազմություններով: Բացի այդ, n -անկախ բազմությունները հանդիսանում են հենց բազմանդամային միջարկման n -ճշգրիտ բազմությունների ենթաբազմությունները: Ատենախոսությունում մենք բնութագրում ենք ոչ ավելի քան $3n$ հանգույցների n -անկախությունը R^2 -ում և R^d -ում: Մենք նկարագրում ենք բոլոր n -անկախ բազմությունները կուբիկների և քվարտիկի վրա: Բնութագրում ենք նաև կետերի բազմությունները, որոնք n -լիով են քվարտիկում, այսինքն δ քվարտիկի այն X ենթաբազմությունները, որոնք ունեն հետևյալ հատկությունը. $p \in \Pi_n$, $p(x) = 0$, $\forall x \in X \Rightarrow$

$p = \delta q$, $q \in \Pi_{n-4}$:

Նշենք նաև, որ բազմաչափ բազմանդամային միջարկման խնդիրը սերտորեն առնչվում է հանրահաշվական երկրաչափության հետ, քանի որ դրա լուծելիությունը հանգում է այն հարցին, թե արդյոք գոյություն ունի որոշակի կարգի հանրահաշվական կոր կամ մակերևույթ, որն անցնում է միջարկման բոլոր հանգույցներով: Ներկայումս մի քանի փոփոխականներով միջարկման ուղղությունը հանդիսանում է նաև հանրահաշվական երկրաչափության արդիական բաժիններից մեկը:

Ատենախոսական աշխատանքի նպատակը և խնդիրները. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային միջարկման համար հանգույցների անկախ և լրիվ բազմությունների ուսումնասիրությունը, դրանց բնութագրումը 3-րդ և 4-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա:

Հետազոտման օբյեկտը. Մի քանի փոփոխականի բազմանդամային տարածություններ, միջարկման անկախ բազմություններ, միջարկման լրիվ բազմություններ, հարթ հանրահաշվական կորեր:

Հետազոտման մեթոդները. Օգտագործվել են բազմաչափ բազմանդամային միջարկման տեսության մեթոդները: Օգտագործվել են նաև գծային հանրահաշվի և հանրահաշվական երկրաչափության որոշ մեթոդներ:

Գիտական նորությունը. Ամբողջությամբ բնութագրվել են բոլոր ոչ ավելի քան 3n հանգույցների անկախությունը ինչպես հարթությունում այնպես էլ R^d -ում: Բնութագրվել են բոլոր անկախ բազմությունները, որոնք գտնվում են 4-րդ կարգի հանհահաշվական կորերի վրա: Բնութագրվել են նաև բոլոր լրիվ բազմությունները, որոնք գտնվում են 4-րդ կարգի հանհահաշվական կորերի վրա:

Կիրառական նշանակությունը. Ատենախոսության մեջ ստացված արդյունքներն ունեն ինչպես տեսական, այնպես էլ՝ կիրառական նշանակություն: Վերը նշված արդյունքները վերաբերում են միջարկումների տեսության պրակտիկայում հաճախ կիրառվող անկախ և լրիվ բազմությունների բնութագրմանը: Դրանք կարող են կիրառվել բոլոր այն խնդիրներում, որոնց լուծման մեջ օգտագործվում է բազմաչափ բազմանդամային միջարկումը:

Պաշտպանությանը ներկայացվում են հետևյալ դրույթները.

- Ոչ ավելի քան 3n հանգույցների n-անկախության ամբողջական բնութագրումը հարթությունում,
- Ոչ ավելի քան 3n հանգույցների n-անկախության ամբողջական բնութագրումը R^d -ում,
- 3-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա գտնվող բոլոր n-անկախ հանգույցների բազմությունների բնութագրումը,
- 4-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա գտնվող բոլոր n-անկախ հանգույցների բազմությունների բնութագրումը,
- 4-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա գտնվող բոլոր n-լրիվ հանգույցների բազմությունների բնութագրումը:

Ստացված արդյունքների ապրոբացիան. Ատենախոսության արդյունքները զեկուցվել են ԵՊՀ Բնֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի

սեմինարներում, ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի ընդհանուր սեմինարում և Ռուս-Հայկական (Սլավոնական) համալսարանի 2012թ. տարեկան սեմինարում:

Հրատարակությունները. Ատենախոսության հիմնական արդյունքները տպագրված են երեք գիտական հոդվածներում:

Ատենախոսության կառուցվածքը և ծավալը. Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից, չորս գլուխներից, ամփոփումից և գրականության ցանկից, որը ներառում է 37 աշխատանք: Ատենախոսության ծավալը 97 էջ է:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ԲՈՎԱՆԴԱԿԱԾՑՈՒՆԸ

Աշխատանքը սկսվում է միաչափ բազմանդամային միջարկման կարևորագույն արդյունքների շարադրմամբ:

Նշանակենք π_n -ով մեկ փոփոխականի $\leq n$ աստիճանի իրական գործակիցներով հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\pi_n = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i : a_i \in R \right\}:$$

Լագրանժի միաչափ միջարկման խնդիրը հետևյալն է. *թվային առանցքի վրա տրված են իրարից տարբեր $x_0, x_1, \dots, x_s$ կետեր (հանգույցներ) և հայտնի են ցանկացած $c_0, c_1, \dots, c_s$, $c_i \in R, i=1, 2, \dots, s$ արժեքներ: Պահանջվում է գտնել այնպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

$$p(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, s: \quad (1.1.1)$$

Այդպիսի $p \in \pi_n$ բազմանդամն անվանում են միջարկիչ, $x_0, x_1, \dots, x_n$ կետերը՝ միջարկման հանգույցներ, իսկ (1.1.1) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ: Հեշտ է նկատել, որ (1.1.1) պայմանները համարժեք են գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի՝ $S+1$ հավասարումներով և $n+1$ անհայտներով, որտեղ անհայտները բազմանդամի գործակիցներն են:

Դժվար չէ նկատել, որ միակ լուծման գոյության համար անհրաժեշտ պայման է, որ տեղի ունենա հետևյալ հավասարությունը՝

$$S = n: \quad (1.1.2)$$

Ստորև տրվում է Լագրանժի միջարկման խնդրի լուծումը.

Թեորեմ 1.1.1. (Լագրանժ). *Ցանկացած $c_0, c_1, \dots, c_n$ թվերի համար գոյություն ունի միակ $p \in \pi_n$ բազմանդամ այնպես, որ*

$$p(x_i) = c_i, \quad i = 0, 1, \dots, n: \quad (1.1.3)$$

Լագրանժի մոտեցմամբ միջարկման խնդրի միակ լուծման ստացման համար նախապես կառուցվում են Լագրանժի ֆունդամենտալ բազմանդամները:

Սահմանում 1.1.1. *Կասենք, որ $p_k^*(x_i) \in \pi_n$ բազմանդամը x_k , $0 \leq k \leq n$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ է π_n տարածությունում, եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները՝*

$$p_k^*(x_j) = \delta_{jk}, \quad 0 \leq j \leq n, \quad (1.1.4)$$

որտեղ δ_{jk} -ն Կրոնեկերի սիմվոլն է:

Պարզ է, որ երբ արդեն հայտնի են բոլոր x_k , $0 \leq k \leq n$ հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները, ապա Լագրանժի միջարկման խնդրի որոնելի $p(x)$ բազմանդամը կարելի է ներկայացնել հետևյալ բանաձևով՝

$$p(x) = \sum_{i=0}^s c_i p_i^*(x) : \quad (1.1.5)$$

Պարագրաֆ 1.2-ում բերված են մի քանի փոփոխականով բազմանդամային միջարկման սահմանումը և որոշ հատկություններ ու պնդումներ, որոնք օգտագործվում են հետագա շարադրանքում:

Մենք օգտագործում ենք ստանդարտ բազմաչափ նշանակումները՝

$$\bar{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d,$$

որտեղ

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in R^d, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in R_+^d :$$

$\Pi_n^d = \Pi_n(R^d)$ -ով նշանակենք n -ից փոքր կամ հավասար գումարային աստիճան ունեցող d փոփոխականի հանրահաշվական բազմանդամների տարածությունը՝

$$\Pi_n^d = \left\{ p(\bar{x}) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha \cdot \bar{x}^\alpha : a_\alpha \in R, \bar{x} \in R^d \right\} :$$

Ցույց է տրվում, որ այդ տարածության չափողականությունը հետևյալ մեծությունն է՝

$$N := \dim \Pi_n^d = \binom{n+d}{d} :$$

Լագրանժի բազմաչափ միջարկման խնդիրը հետևյալն է.

Դիցուք տրված են $X = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(s)}\} \subset R^d$ հանգույցների բազմությունը և կամայական $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ իրական արժեքների բազմություն: Գտնել $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամ այնպիսին, որ

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, s : \quad (1.2.2)$$

Այս խնդիրը կնշանակենք (Π_n^d, X) -ով, որոնելի $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամը կվականենք միջարկիչ բազմանդամ, իսկ (1.2.2) պայմանները՝ միջարկման պայմաններ:

Սահմանում 1.2.1. (Π_n^d, X) միջարկման խնդիրը կանվանենք ճշգրիտ, եթե ցանկացած $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ արժեքների բազմության համար գոյություն ունի միակ $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամ, որը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$p(\bar{x}^{(k)}) = c_k, \quad k = 1, 2, \dots, s:$$

Այդ դեպքում $X = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(s)}\}$ միջարկման հանգույցների բազմությունը կանվանենք նաև $\Pi_n^d -$ ճշգրիտ: Ինչպես միաչափ, այնպես էլ բազմաչափ միջարկման համար անհրաժեշտ պայման է հանդիսանում հետևյալ հավասարությունը՝

$$s = N: \quad (1.2.4)$$

Սակայն (1.2.4) պայմանը չի հանդիսանում բավարար պայման միջարկման խնդրի ճշգրտության համար: Այս դեպքում՝ ճշգրտությունն էապես կախված է ոչ միայն հանգույցների քանակից, այլ նաև դրանց երկրաչափական դիրքից:

Պնդում 1.2.1. Դիցուք $X = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(N)}\} \subset \mathbb{R}^d$, $N = \binom{n+d}{d}$:

(Π_n^d, X) միջարկման խնդիրը կլինի ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$p \in \Pi_n^d \quad \text{և} \quad p(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \Rightarrow p = 0:$$

Նաև համարժեքորեն տեղի ունի հետևյալը՝

Պնդում 1.2.2. Դիցուք $X = \{\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(N)}\} \subset R^d$, $N = \binom{n+d}{d}$:

(Π_n^d, X) միջարկման խնդիրը կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի այսպես կոչված զրոյացնող բազմանդամ՝

$$\exists p^\circ \in \Pi_n^d, \quad p^\circ \neq 0, \quad \text{այնպիսին, որ} \quad p^\circ(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N:$$

Այսուհետ ամեն մի $p \in \Pi_n^d$, $\deg p = n \geq 1$ (ոչ զրո) բազմանդամի համապատասխանեցնենք $p(\bar{x}) = 0$ հավասարումով տրվող $\leq n$ -րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթ: Այժմ՝ Պնդում 1.2.2-ից ստանում ենք բազմաչափ միջարկման ճշգրտության երկրաչափական մեկնաբանությունը:

Պնդում 1.2.3. (Π_n^d, X) միջարկման խնդիրը կլինի ոչ ճշգրիտ այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $\leq n$ -րդ կարգի հանրահաշվական հիպերմակերևույթ, որն անցնում է X բազմության բոլոր N հանգույցներով:

Ստորև տրվում է ֆունդամենտալ բազմանդամի գաղափարը.

Սահմանում 1.2.2. $p \in \Pi_n^d$ բազմանդամը կանվանենք $A := \bar{x}^{(k)} \in X$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամ կամ Լագրանժի բազմանդամ Π_n^d տարածության համար, եթե

$$p \in \Pi_n^d, \quad p(\bar{x}^{(k)}) \neq 0 \quad \text{և} \quad p(\bar{x}^{(j)}) = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \quad j \neq k : \quad (1.2.5)$$

Սահմանում 1.2.3. Կասենք, որ X բազմությունը Π_n^d -անկախ է, կամ ավելի կարճ՝ n -անկախ է, եթե X -ի բոլոր հանգույցների ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն։ Հակառակ դեպքում՝ կասենք, որ X -ը Π_n^d -կախված է (n -կախված է)։

Սահմանում 1.2.4. Դիցուք տրված է Q -ն k -րդ կարգի կորը առանց պատիկ կոմպոնենտների։ X բազմությունը կանվանենք n -լրիվ Q կորի վրա, եթե

$$p \in \Pi_n, \quad p|_X = 0, \quad \Rightarrow \quad p = qr, \quad r \in \Pi_{n-k} :$$

Այժմ ներկայացնենք հետևյալ հայտնի պնդումը։

Պնդում 1.2.4. Որպեսզի (Π_n^d, X) միջարկման խնդիրը, որտեղ $\#X = N$, լինի ճշգրիտ անհրաժեշտ է և բավարար, որ X -ը լինի Π_n^d -անկախ։

Պնդում 1.2.4-ից որպես հետևանք կստանանք՝

Հետևանք 1.2.1. Եթե բոլոր ֆունդամենտալ բազմանդամները գոյություն ունեն, ապա դրանք միակն են։

Հետևյալ լեմման բնութագրում է ճշգրիտ բազմությունների ֆունդամենտալ բազմանդամների մի հատկություն.

Լեմմա 1.2.1. Դիցուք (Π_n^d, X) միջարկման խնդիրը ճշգրիտ է, և $p_A^* \in \Pi_n^d$ -ն հանդիսանում է $A \in X$ հանգույցի ֆունդամենտալ բազմանդամը։ Այդ դեպքում՝ $\deg p_A^* = n$ ։ Ավելին՝ p_A^* ֆունդամենտալ բազմանդամը չունի պատիկ արտադրիչ։

Հայտնի է հետևյալ փաստը.

Թեորեմ 1.2.1. Դիցուք տրված է $X_s = \{x_i \in R^d, i = 1, 2, \dots, s\}$, $s \leq N$, բազմությունը։ Կամայական ε -ի համար, $\varepsilon > 0$, գոյություն ունի Π_n^d -անկախ $Y_s = \{y_i \in R^d, i = 1, 2, \dots, s\}$, բազմություն այնպես, որ $\|x_i - y_i\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, s$.

Գլխում 2-ում բերված են միջարկման համար ճշգրիտ բազմությունների կառուցման մեթոդներ (կոնստրուկցիաներ)։ Քանի որ, ինչպես արդեն նշել ենք, բազմաչափ բազմանդամային միջարկման ճշգրտությունը էապես կախված է միջարկման հանգույցների երկրաչափական դիրքից, ուստի կարևորագույն խնդիրներից մեկն այստեղ որևէ բազմանդամային տարածության, օրինակ Π_n^d -ի համար, ճշգրիտ կոնստրուկցիաների մշակումն է։

- Թենզորական արտադրյալով ստացվող կոնստրուկցիա

Բազմաչափ միջարկման տեսության մեջ ամենավաղ կիրառվող եղանակը թենզորական արտադրյալով միջարկումն է։

Թենզորական արտադրյալով միջարկման համար հեշտությամբ ընդհանրացվում են միաչափ միջարկման Լագրանժի բանաձևը և Նյուտոնի բանաձևը բաժանված տարբերություններով հանդերձ։ Չնայած այս կոնստրուկցիայի և ստացված միջարկման բանաձևերի պարզությանը, այն իրենից ներկայացնում է միջարկման ճշգրիտ կոնստրուկցիաների խիստ մասնավոր դեպք։ Նշենք, որ թենզորական

արտադրյալով ստացվող կոնստրուկցիայի թերությունն այն է, որ դիտարկվող բազմանդամային տարածությունն ինվարիանտ չէ գծային ձևափոխությունների նկատմամբ: Այլ կերպ ասած՝ թենզորական արտադրյալով ճշգրիտ ցանցը գծային ձևափոխության արդյունքում կարող է բերվել ոչ ճշգրիտ ցանցի:

- Բերգոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիա

Սահմանում 2.2.2. *Կասենք, որ $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$, $\#\mathbb{X} = N = \binom{n+d}{d}$*

հանգույցների բազմությունը բավարարում է Բերգոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային, եթե զոյություն ունեն $n+1$ հիպերհարթություններ $h_1, h_2, \dots, h_{n+1}$ այնպես, որ՝

h_1 -ին պատկանում են $\binom{n+d-1}{d-1}$ անկախ հանգույցներ $\mathbb{X}$ -ից,

$h_2 \setminus h_1$ -ին պատկանում են $\binom{n+d-2}{d-1}$ անկախ հանգույցներ $\mathbb{X}$ -ից,

$\vdots$

$h_{n+1} \setminus \{h_1 \cup \dots \cup h_n\}$ -ին պատկանում է $\binom{d-1}{d-1} = 1$ հանգույց $\mathbb{X}$ -ից:

Ճիշտ է հետևյալ պնդումը (տես 1).

Պնդում 2.2.1. *Բերգոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիային բավարարող $\mathbb{X}$ հանգույցների բազմությունը $\prod_n^d -$ ճշգրիտ է:*

Ատենախոսության մեջ մենք դիտարկում ենք նաև Բերգոլարի-Ռադոնի կոնստրուկցիայի ընդհանրացումը կամայական հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:

- Չանգ-Յաոյի բնական ցանց

Սահմանում 2.4.1. *Կասենք, որ $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^d$, $\#\mathbb{X} = N = \binom{n+d}{d}$*

հանգույցների բազմությունը հանդիսանում է բնական ցանց, եթե զոյություն ունեն ընդհանուր դրության մեջ գտնվող $n+d$ հիպերհարթություններ՝ $h_1, h_2, \dots, h_{n+d}$ այնպիսին, որ նրանց բոլոր հնարավոր d հատ հիպերհարթությունների հատման կետերը կազմում են $\mathbb{X}$ բազմության հանգույցները:

Ճիշտ է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.4.1. *Դիցուք ունենք $h_1, h_2, \dots, h_{n+d}$ հիպերհարթություններ, որոնք գտնվում են ընդհանուր դրության մեջ, այսինքն՝*

1. *Յանկացած $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_d}$ հատվում են մեկ կետում,*

¹ H. Hakopian, K. Jetter and G. Zimmermann, A new proof of the Gasca-Maeztu conjecture for $n=4$ - J. Approx. Theory (2009), v. 159, № 2, doi: 10. 1016. /j. jat. 2009.04.006, 224-242.

2. Յանկացած $h_{j_1}, h_{j_2}, \dots, h_{j_{d+1}}$ -ի հատումը դատարկ է:

Այդ դեպքում հիպերհարթությունների բոլոր հնարավոր d -յակների հատման $\binom{n+d}{d}$

կետերը կլինեն ճշգրիտ $\prod_n^d$ -ի համար:

Ատենախոսության մեջ մենք դիտարկում ենք նաև Չանգ-Յաոյի բնական ցանցի ընդհանրացումը կամայական հանրահաշվական կորերի դեպքի համար:

- Նյուտոնի ցանց

Դիտարկենք Նյուտոնի ցանցը հարթության վրա: ՈՒՆենք

$$\mathbb{X} = \{(j, k) \in \mathbb{Z}_+^2 : j + k \leq n\}:$$

Դիտարկենք ուղիղների երեք խումբ, յուրաքանչյուրում $n+1$ ուղիղ՝

$$\ell_k^{(1)} : x = k, \quad \ell_k^{(2)} : y = k, \quad \ell_k^{(3)} : x + y = k,$$

որտեղ $k = 0, 1, \dots, n$: Նկատենք, որ $\mathbb{X}$ բազմության հանգույցները հանդիսանում են տարբեր խմբերին պատկանող երեք ուղիղների հատման կետեր: Որպես ֆունդամենտալ բազմանդամները կարելի է դիտարկել հետևյալ բազմանդամները՝

$$p_{(j,k)}^* = \prod_{i=0}^{j-1} \ell_i^{(1)} \prod_{i=0}^{k-1} \ell_i^{(2)} \prod_{i=j+k+1}^n \ell_i^{(3)}:$$

Գլուխ 3-ում ամբողջությամբ բնութագրվում են ոչ ավելի քան 3n հանգույցների

n-անկախությունը:

Դիտարկենք մի պարզ, բայց շատ կերևոր հետևյալ թեորեմը, որը բնութագրում է ոչ ավելի քան $n+1$ հանգույցները.

Թեորեմ 3.1.1 (Մեվերի) *Հարթության ցանկացած ոչ ավելին քան $n+1$ հանգույցներ n - անկախ են:*

Դիտարկենք բազմանդամների հետևյալ կարևոր դասը: Նշանակենք

$$P_{n,X} := \{p \in \Pi_n, p|_X = 0\}:$$

Հայտնի է հետևյալ n - անկախության բնութագրումը.

Պնդում 3.1.1. *X բազմությունը n - անկախ է, այն և միայն այն դեպքում երբ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\dim P_{n,X} = \dim \Pi_n - \# X.$$

Նշանակենք

$$d := d(n, k) := \dim \Pi_n - \dim \Pi_{n-k} = (1/2)k(2n+3-k):$$

Հայտնի է հետևյալ պնդումը (տես օր. 2).

Պնդում 3.1.4. *Դիցուք q -ն $k \leq n$ կարգի անվերածելի կոր է: Այդ դեպքում՝*

1) *Յանկացած X , $X \subset q$, $\# X > d(n, k)$ բազմություն n -կախյալ է,*

² L. Rafayelyan, Poised nodes set constructions on algebraic curves, - East J. on Approx., vol. 17, N3 (2011), pp. 285-298.

2) Ցանկացած X , $X \subset q$, $\#X = d(n, k)$ բազմություն n -անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն n -լրիվ է q -ի վրա:

Հաջորդ լեմմայում և 2 պնդումներում մենք կուսումնասիրենք 2 բազմություն՝ X , Y , որտեղ X -ը n -անկախ է, իսկ Y -ը բավարարում է այնպիսի պայմանների, որ $Z = X \cup Y$ բազմությունը լինի n -անկախ:

Լեմմա 3.1.1. *Դիցուք X բազմությունը n -անկախ է, իսկ Y բազմության ցանկացած կետ ունի ֆունդամենտալ բազմանդամ ըստ $Z = X \cup Y$ բազմության: Այդ դեպքում Z բազմությունը n -անկախ է:*

Պնդում 3.1.5. *Ենթադրենք, որ $X \subset q$, $q \in \Pi_k$ բազմությունը n -անկախ է, իսկ Y , $Y \cap q = \emptyset$ բազմությունը $(n-k)$ -անկախ է: Այդ դեպքում $Z = X \cup Y$ բազմությունը n -անկախ է:*

Պնդում 3.1.6. *Ենթադրենք, որ $X \subset q$, $q \in \Pi_k$, $\#X = d(n, k)$ բազմությունը n -անկախ է իսկ $Y \cap q = \emptyset$: Այդ դեպքում $Z = X \cup Y$ բազմությունը n -անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ Y բազմությունը $(n-k)$ -անկախ է:*

Հաջորդ թեորեմը բնութագրում է հարթության ոչ ավելի քան $2n+1$ հանգույցների n -անկախությունը (տես 3):

Թեորեմ 3.1.3. *Հարթության ցանկացած ոչ ավելի քան $2n+1$ հանգույցներ n -անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ դրանցից ոչ մի $n+2$ -ը համագծի չեն: Ավելին, անկախության դեպքում ցանկացած կետի ֆունդամենտալ բազմանդամն ուղիղների արտադրյալ է:*

Հետագայում մենք կօգտվենք հետևյալ հայտնի թեորեմից (տես 4).

Թեորեմ 3.1.4. (Մելլեյ-Բախարախ) *Դիցուք տրված են m -րդ և n -րդ կարգի համապատասխանաբար p և q կորերը և հայտնի է, որ վերջիններս հատվում են ճիշտ m կետերում՝ $Z = p \cap q$, $\#Z = mn$: Նշանակենք $k_0 = m + n - 3$: Այդ դեպքում ճիշտ են հետևյալ պնդումները.*

1) *Ցանկանած $p \in \Pi_{k_0}$ բազմանդամ, որն անցնում է Z բազմության $m-1$ կետերով, անցնում է նաև հատման մնացած կետով:*

2) *Ցանկանած $U \subset Z$, $\#U = \dim \Pi_k$ բազմություն k -անկախ է, այն և միայն այն դեպքում, երբ $U^c = Z \setminus U$ բազմությունը $(k_0 - k)$ -անկախ է:*

Պարագրաֆ 3.3-ում բնութագրվում են ոչ ավելի քան $3n$ հանգույցների n -անկախությունը: Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 3.3.1: *Դիցուք տրված է X , $\#X \leq 3n$ բազմությունը: X բազմությունը n -կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.*

³ H. A. Hakopian, On a Class of Hermite Interpolation Problem, - *Advances in Comput. Math.*, 12 (2000), 303-309.

⁴ Eisenbud D., M. Green and J. Harris, - Cayley-Bacharach theorems and conjectures, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 33(3), (1996), 295-324.

- 1) X բազմությունում գոյություն ունեն $n+2$ համագիծ հանգույցներ,
- 2) X բազմությունում գոյություն ունեն $2n+2$ հանգույցներ, որոնք գտնվում են որևէ կոնիկի (վերածելի կամ անվերածելի) վրա,
- 3) $\#X = 3n$ և գոյություն ունի $\gamma \in \Pi_3$ կուբիկ և $\sigma \in \Pi_n$ կոր այնպես, որ $\gamma \cap \sigma = X$:

Նմանատիպ արդյունք ստացվում է, երբ ուսումնասիրվում է ոչ ավելի քան $3n$ հանգույցների n -անկախությունը R^d -ում, որոնք քննարկված են պարագրաֆ 3.4-ում:
Մասնավորապես ստացվել է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 3.4.1: *Դիցուք տրված է X , $\#X \leq 3n$ բազմությունը R^d -ում: X բազմությունը n -կախյալ է այն և միայն այն դեպքում, երբ տեղի ունեն հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը.*

- 1) X բազմությունում գոյություն ունեն $n+2$ համագիծ հանգույցներ,
- 2) X բազմությունում գոյություն ունեն $2n+2$ համագիծ հանգույցներ, որոնք գտնվում են որևէ կոնիկի (վերածելի կամ անվերածելի) վրա,
- 3) $\#X = 3n$ և գոյություն ունի $\gamma \in \Pi_3$ կուբիկ և $\sigma \in \Pi_n$ կոր այնպես, որ $\gamma \cap \sigma = X$:

Գլուխ 4-ում ուսումնասիրվում են հանգույցների անկախ և լրիվ բազմություններ 4-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա:

Հեշտությամբ ստուգվում են պնդման հետևյալ պայմանները.

Պնդում 4.1.1. *Դիցուք տրված է q -ն k -րդ կարգի կորը առանց պատիկ կոմպոնենտների: Այդ դեպքում տեղի ունեն.*

- 1) եթե $X \subset q$ բազմությունը n -անկախ է, ապա $\#X \leq d(n, k)$,
- 2) եթե $X \subset q$ բազմությունը n -լրիվ է, ապա $\#X \geq d(n, k)$,
- 3) $X \subset q$, $\#X = d(n, k)$ բազմությունը n -անկախ է, այն և միայն այն դեպքում երբ այն n -լրիվ է,
- 4) $X \subset q$, $\#X \geq d(n, k)$ բազմությունը n -լրիվ է q -ի վրա, եթե q -ն անվերածելի է:

Այժմ մենք պատրաստ ենք բնութագրելու 4-րդ կարգի կորերի վրա գտնվող բազմությունների անկախությունը: Հերթականությամբ շարադրենք 4-րդ կարգի կորերի վրա գտնվող հանգույցների անկախությունը և լրիվությունը բնութագրող պնդումներ:

- $\geq 4n-1$ հանգույցների անկախությունը:

Պնդում 4.1.2. *Ցանկացած $\geq 4n-1$ հանգույցներ δ կվարտիկի վրա n -կախյալ են:*

- $4n-2$ հանգույցների անկախությունը:

Պնդում 4.1.3. *Ցանկացած $4n-2$ հանգույցներ δ կվարտիկի վրա n -անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ այդ հանգույցները n -լրիվ է δ կվարտիկի վրա:*

- $4n-3$ հանգույցների անկախությունը:

Պնդում 4.1.4. *Դիցուք δ անվերածելի կվարտիկի վրա տրված է X , $\#X = 4n - 3$ բազմությունը: Ենթադրենք, որ $A_i \in \delta \setminus X$, $i = 1, 2, 3$ հանգույցները համագիծ են: Այդ դեպքում X բազմությունը n -անկախ է այն և միայն այն դեպքում, երբ n -անկախ են $X \cup \{A_i\}$ բազմություններից յուրաքանչյուրը, $i = 1, 2, 3$:*

- **$4n - 4$ հանգույցների անկախությունը:**

Պնդում 4.1.5. *Դիցուք δ կվարտիկի վրա տրված է X , $\#X = 4n - 4$ բազմությունը: Ենթադրենք, որ X բազմությունը δ կվարտիկի վրա $(n - 1)$ -լրիվ է՝*

$$p \in \Pi_{n-1}, p|_X = 0 \Rightarrow p = \delta q, q \in \Pi_{n-5} \quad (4.1.2)$$

Ենթադրենք նաև, որ եթե δ -ն ունի ուղիղ կոմպոնենտ, ապա այն չի անցնում X բազմության $(n + 2)$ հանգույցներով: Այդ դեպքում X բազմությունը n -անկախ է:

Պնդում 4.1.6. *Դիցուք δ կվարտիկի վրա տրված է X , $\#X = 4n - 4$ բազմությունը n -անկախ է: Ենթադրենք, որ եթե δ -ն ունի կուրիկ կոմպոնենտ, ապա այն չի անցնում X բազմության $3n$ հանգույցներով: Այդ դեպքում X բազմությունը δ կվարտիկի վրա $(n - 1)$ -լրիվ է:*

- **$\leq 4n - 5$ հանգույցների անկախությունը:**

Պնդում 4.1.7. *δ անվերածելի կվարտիկի վրա տրված ցանկացած X , $\#X \leq 4n - 5$ բազմությունը n -անկախ է:*

4.2 պարագրաֆում մենք բնութագրված են 4-րդ կարգի կորի վրա բոլոր n -լրիվ բազմությունները:

- **$\leq 4n - 3$ հանգույցների լրիվությունը:**

Պնդում 4.2.1. *Ցանկացած $\leq 4n - 3$ հանգույցներ δ կվարտիկի վրա n -լրիվ չեն:*

- **$4n - 2$ հանգույցների լրիվությունը:**

Պնդում 4.2.2. *Ցանկացած $4n - 2$ հանգույցներ δ կվարտիկի վրա n -լրիվ են այն և միայն այն դեպքում, երբ վերջիններս n -անկախ են:*

- **$4n - 1$, $4n$ հանգույցների լրիվությունը:**

Պնդում 4.2.3. *Դիցուք δ կվարտիկի վրա տրված է X , $\#X = 4n - 1$ բազմությունը: Այդ դեպքում X բազմությունը n -լրիվ է δ -ի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $A \in X$ կետ այնպես, որ $X \setminus A$ բազմությունը n -լրիվ է δ -ի վրա:*

Պնդում 4.2.4. *Դիցուք δ կվարտիկի վրա տրված է X , $\#X = 4n$ բազմությունը: Այդ դեպքում X բազմությունը n -լրիվ է δ -ի վրա այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի $A \in X$ կետ այնպես, որ $X \setminus A$ բազմությունը n -լրիվ է δ -ի վրա:*

- **$\geq 4n + 1$ հանգույցների լրիվությունը:**

Պնդում 4.2.2. $3n+1$ հանգույցներ δ անվերածելի կվարտիկի վրա n -լրիվ են:

ԱՇԽԱՏԱՆՔԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները՝

1. Հարթության մեջ ամբողջությամբ բնութագրվել է ոչ ավելի քան $3n$ հանգույցների n -անկախությունը:
2. R^d -ում ամբողջությամբ բնութագրվել է ոչ ավելի քան $3n$ հանգույցների n -անկախությունը:
3. Բնութագրվել են բոլոր n -անկախ բազմությունները 4-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա:
4. Բնութագրվել են բոլոր n -լրիվ բազմությունները 4-րդ կարգի հանրահաշվական կորերի վրա:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅԻ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ ՀՐԱՏԱՐԱԿԱԾ ԱՇԽԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ

1. H. Hakopian, A. Malinyan, Characterization of n -independent sets with no more than $3n$ points, - *Jaen J. Approx.* 4(2), (2012) 121-136.
2. H. A. Hakopian, A. R. Malinyan, On n -independent sets located on quartics, *Proceedings of the YSU, Physical and Mathematical Sciences*, N1 (2013), pp. 6-12.
3. A. Malinyan, Characterization of n -independent sets of $\leq 3n$ points in R^d , *Вестник РАУ. Серия физико-математические и естественные науки*, №1, 3-15 (2013).

О МНОЖЕСТВАХ n -НЕЗАВИСИМЫХ УЗЛОВ

Многомерная полиномиальная интерполяция является одним из основных предметов в теории приближений и численного анализа. Довольно полное решение задачи одномерной полиномиальной интерполяции был получен Лагранжем и Ньютоном. Задача многомерной полиномиальной интерполяции является гораздо более сложной. В этом случае существование и единственность интерполяционного многочлена Лагранжа зависит от геометрического распределения узлов интерполяции.

Обозначим через $\Pi_n^d = \Pi_n(R^d)$ пространство многочленов d переменных суммарной степени не превышающей n . В случае $d = 2$ коротко обозначим $\Pi_n = \Pi_n^2$.

Определение 1. Задача интерполяции (Π_n^d, X_s) называется разрешимой, если для каждого множества $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ существует многочлен $p \in \Pi_n^d$ удовлетворяющий условиям

$$p(\bar{x}_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Назовем многочлен $p \in \Pi_n^d$ фундаментальным, или n -фундаментальным, для точки $A = \bar{x}_k \in X_s$ и обозначим через $p_k^* := p_A^* := p_{A, X_s, n, d}^*$, если

$$p(\bar{x}_i) = \delta_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где δ является символом Кронекера.

Определение 2. Множество X называется Π_n^d -независимым, или коротко n -независимым, если все фундаментальные многочлены $p_A^* \in \Pi_n^d$, $A \in X$, существуют, или эквивалентным образом интерполяционная задача (Π_n^d, X_s) разрешима.

Первую характеристику n -независимых множеств узлов дал Севери.

Теорема1 (Севери). Каждое множество $\leq n+1$ точек в R^d является n -независимым.

В диссертации мы охарактеризовали все n -независимые множества $\leq 3n$ точек в R^d .

Теорема 2. Пусть дано множество узлов X в R^d , $\#X \leq 3n$. Тогда множество X является n -зависимым тогда и только тогда, когда имеет место одно из следующих утверждений:

- i) Существуют $n+2$ коллинеарных точек принадлежащие X ,
- ii) Существуют $2n+2$ точек принадлежащие X лежащие на некоторой конике $\beta \in \Pi_2$ на плоскости,
- iii) $\#X = 3n$ и существуют кубика $\gamma \in \Pi_3$ и кривая $\sigma \in \Pi_n$ на плоскости так, что $\gamma \cap \sigma = X$.

Определение 3. Пусть q алгебраическая кривая порядка k без кратных компонент. Множество X называется p -полным на q если

$$p \in \Pi_n, p|_X = 0 \Rightarrow p = qr, r \in \Pi_{n-k}.$$

Далее мы представляем наши результаты касающие характеристики p -независимости и p -полноты множеств расположенных на алгебраических кривых 4-ого порядка, т.е. на кватриках.

Начнем со случая p -независимости:

- Каждое множество $\geq 4n-1$ точек на кватрике является p -зависимым.
- Каждое множество $4n-2$ точек на кватрике является p -независимым тогда и только тогда, когда оно является p -полным на этой кватрике.
- Пусть δ некоторая неприводимая кватрика. Предположим, что множество $4n-3$ точек X расположен на δ и точки $A_i \in \delta \setminus X, i=1,2,3$ являются коллинеарными. Тогда множество X является p -независимым тогда и только тогда, когда множество $4n-3$ точек $X \cup \{A_i\}$ является p -независимым, где $i=1,2$, или 3.
- Пусть δ некоторая кватрика. Предположим, что множество $4n-4$ точек X находящихся на δ является $(n-1)$ -полным на δ . Предположим также, что ни один линейный компонент δ не содержит $n+2$ точек из X , если δ является приводимой с линейным компонентом. Тогда X является p -независимым.
- Каждое множество $\leq 4n-5$ точек на неприводимой кватрике является p -независимым.

Далее мы приводим результаты об p -полноте множеств расположенных на кватрике.

- Каждое множество $\leq 4n-3$ точек на кватрике не является p -полным на этой кватрике.
- Каждое подмножество состоящее из $4n-2$ точек кватрики является p -полным на этой же кватрике тогда и только тогда, когда оно является p -независимым.
- Пусть δ некоторая кватрика. Тогда каждое множество $4n-1$ или $4n$ точек X на кватрике δ является p -полным тогда и только тогда, когда существует такая точка $A \in X$, что множество $X \setminus A$ является p -независимым на этой кватрике.
- Каждое множество $\geq 4n+1$ точек на неприводимой кватрике является p -полным на этой кватрике.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Охарактеризованы все p -независимые множества $\leq 3n$ точек на плоскости.
2. Охарактеризованы все p -независимые множества $\leq 3n$ точек в R^d .
3. Охарактеризованы все p -независимые множества расположенные на алгебраических кривых 3-го порядка.
4. Охарактеризованы все p -независимые множества расположенные на алгебраических кривых 4-го порядка.
5. Охарактеризованы все p -полные множества расположенные на алгебраических кривых 4-го порядка.

ABSTRACT

Malinyan Argishti

ABOUT n -INDEPENDENT SETS OF POINTS

Multivariate polynomial interpolation is a basic subject in Approximation Theory and Numerical Analysis. A rather complete solution of univariate polynomial interpolation problem were obtained already by Lagrange and Newton. The multivariate polynomial interpolation problem is much more complicated. In this case the existence and uniqueness of a Lagrange interpolation polynomial depend on the geometrical distribution of the interpolation nodes.

Denote by $\Pi_n^d = \Pi_n(R^d)$ the space of polynomials in d variables of total degree not exceeding n . In the case $d = 2$ we denote it briefly $\Pi_n = \Pi_n^2$.

Definition 1. The interpolation problem (Π_n^d, X_s) is called solvable, if for any set of values $\{c_1, c_2, \dots, c_s\}$ there exists a polynomial $p \in \Pi_n^d$ satisfying the conditions

$$p(\bar{x}_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

We call a polynomial $p \in \Pi_n^d$ fundamental, or n -fundamental, for the point $A = \bar{x}_k \in X_s$ and denote it by $p_k^* := p_A^* := p_{A, X_s, n, d}^*$, if

$$p(\bar{x}_i) = \delta_{ki}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

where δ is the Kronecker symbol.

Definition 2. A set X is called Π_n^d -independent, or briefly n -independent, if all its fundamental polynomials $p_A^* \in \Pi_n^d$, $A \in X$, exist, or equivalently the interpolation problem (Π_n^d, X_s) is solvable.

The first characterization of n -independence sets of points was given by Severi.

Theorem 1 (Severi). Any set of $\leq n+1$ points in R^d is n -independent.

In the thesis we characterize all n -independent sets of $\leq 3n$ points in R^d .

Theorem 2. Suppose that a set of points X is given with $\#X \leq 3n$ in R^d . Then we have that X is n -dependent if and only if one of the following statements holds:

- i) There are $n+2$ collinear points in X ,
- ii) There are $2n+2$ points of X belonging to a conic $\beta \in \Pi_2$ in a plane,
- iii) $\#X = 3n$ and there is a cubic $\gamma \in \Pi_3$ and a curve $\sigma \in \Pi_n$ in a plane such that $\gamma \cap \sigma = X$.

Definition 3. Let q be an algebraic curve of degree k without multiple components. A set X is called n -complete in q if

$$p \in \Pi_n, p|_X = 0 \Rightarrow p = qr, r \in \Pi_{n-k}.$$

Next we present our results concerning the characterization of n -independence and n -completeness sets located on algebraic curves of degree 4, i.e. on quartics.

We start with the case of n -independence:

- Any set of $\geq 4n-1$ points on a quartic is n -dependent.
- Any set of $4n-2$ points on a quartic is n -independent if and only if it is n -complete there.
- Let δ be any irreducible quartic. Assume that a set X of $4n-3$ points is located on δ and the points $A_i \in \delta \setminus X$, $i=1,2,3$ are collinear. Then the set X is n -independent if and only if a set $X \cup \{A_i\}$ of $4n-3$ points is n -independent, where $i=1,2$, or 3 .
- Let δ be any quartic. Suppose that a set X of $4n-4$ points located on δ is $(n-1)$ -complete in δ . Suppose also that no line component of δ contains $n+2$ points of X , if δ is reducible with a line component. Then X is n -independent.
- Any set of $\leq 4n-5$ points on an irreducible quartic is n -independent.

Next we bring the results on n -completeness:

- Any set of $\leq 4n-3$ points on quartics is not n -complete there.
- Any subset of a quartic consisting of $4n-2$ points is n -complete there if and only if it is n -independent.
- Let δ be any quartic. Then any set X of with $4n-1$ or $4n$ points located on δ is n -complete there if and only if there is a point $A \in X$ such that the set $X \setminus A$ is n -complete there.
- Any set of $\geq 4n+1$ points on an irreducible quartics is n -complete there.

The following main results are obtained in the thesis:

1. All n -independent sets of $\leq 3n$ points in the plane are characterized.
2. All n -independent sets of $\leq 3n$ points in R^d are characterized.
3. All n -independent sets located on algebraic curves of degree 3 are characterized.
4. All n -independent sets located on algebraic curves of degree 4 are characterized.
5. All n -complete sets located on algebraic curves of degree 4 are characterized.